Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение

высшего образования

«Ставропольский государственный аграрный университет»

Кафедра «Математика»

**ОСНОВЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ**

Учебное пособие

Москва 2018

УДК 51 (075.8)

ББК 22.1я73

Литвин, Д.Б., Шибаев В.П.

Основы математической статистики : учебное пособие / Д. Б. Литвин, В.П. Шибаев – Москва , издательство МИГУП, 2018 – 89 с.

Пособие предназначено для студентов ветеринарных направлений подготовки. Содержание пособия в целом соответствует второй части дисциплины основы биологической статистики.

# ОГЛАВЛЕНИЕ

[1. ПЕРВИЧНАЯ ОБРАБОТКА РЕЗУЛЬТАТОВ НАБЛЮДЕНИЙ 5](#_Toc496648489)

[1.1. Вариационный и статистический ряды 5](#_Toc496648490)

[Дискретный статистический ряд 5](#_Toc496648491)

[Интервальный статистический ряд 7](#_Toc496648492)

[1.2. Первичная обработка в Excel 10](#_Toc496648493)

[ЗАДАЧИ 13](#_Toc496648494)

[2. ОЦЕНКИ ПАРАМЕТРОВ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ 15](#_Toc496648495)

[2.1. Требования к оценкам 15](#_Toc496648496)

[2.2. Точечные оценки M(X) и D(X) 15](#_Toc496648497)

[2.3. Другие характеристики вариационного ряда 17](#_Toc496648498)

[2.4. Вычисление точечных оценок в Excel 18](#_Toc496648499)

[ЗАДАЧИ 20](#_Toc496648500)

[2.5. Интервальные оценки 23](#_Toc496648501)

[Некоторые статистические распределения 23](#_Toc496648502)

[Теорема о распределении выборочных характеристик 27](#_Toc496648503)

[Интервальные оценки математического ожидания нормального распределения 28](#_Toc496648504)

[Интервальные оценки дисперсии нормального распределения 31](#_Toc496648505)

[Интервальная оценка вероятности события 33](#_Toc496648506)

[2.6. Вычисление границ доверительных интервалов в Excel 36](#_Toc496648507)

[ЗАДАЧИ 36](#_Toc496648508)

[3. КОРРЕЛЯЦИОННЫЙ И РЕГРЕССИОННЫЙ АНАЛИЗ 42](#_Toc496648509)

[3.1. Линейная корреляция 42](#_Toc496648510)

[3.2. Нелинейная корреляция 44](#_Toc496648511)

[4. ПРОВЕРКА СТАТИСТИЧЕСКИХ ГИПОТЕЗ 50](#_Toc496648512)

[4.1. Проверка гипотез о числовых значениях 51](#_Toc496648513)

[Проверка гипотезы о равенстве математического ожидания нормального распределения заданному значению 51](#_Toc496648514)

[Проверка гипотезы о числовом значении дисперсии нормального распределения 56](#_Toc496648515)

[Проверка гипотезы о числовом значении вероятности события 58](#_Toc496648516)

[Проверка гипотезы о значимости выборочного коэффициента корреляции 59](#_Toc496648517)

[ЗАДАЧИ 60](#_Toc496648518)

[4.2. Проверка гипотез о равенстве числовых характеристик 66](#_Toc496648519)

[Проверка гипотезы о равенстве дисперсий двух нормальных распределений 66](#_Toc496648520)

[Проверка гипотезы о равенстве математических ожиданий нормальных распределений 68](#_Toc496648521)

[ЗАДАЧИ 71](#_Toc496648522)

[ВАРИАНТЫ ИНДИВИДУАЛЬНЫХ ЗАДАНИЙ 73](#_Toc496648523)

[ПРИЛОЖЕНИЕ 1 - Нормированная функция Гаусса  77](#_Toc496648524)

[ПРИЛОЖЕНИЕ 2 - Интегральная функция Лапласа *Ф(t)* 78](#_Toc496648525)

[ПРИЛОЖЕНИЕ 3 - Таблица значений критерия Стьюдента 80](#_Toc496648526)

[ПРИЛОЖЕНИЕ 4 - Критические точки распределения  Пирсона 81](#_Toc496648527)

[ПРИЛОЖЕНИЕ 5 - Критические точки распределения Стьюдента 82](#_Toc496648528)

[ПРИЛОЖЕНИЕ 6 - Критические точки распределения Фишера-Снедекора 83](#_Toc496648529)

[ЛИТЕРАТУРА 84](#_Toc496648530)

# ПЕРВИЧНАЯ ОБРАБОТКА РЕЗУЛЬТАТОВ НАБЛЮДЕНИЙ

## Вариационный и статистический ряды

Пусть для изучения некоторого количественного признака *X* из всей объема *N* генеральной совокупности однородных объектов извлечена выборка объема *n*. Наблюдавшиеся значения  признака *X* называют *вариантами*, а последовательность вариант, записанных в возрастающем порядке, – *вариационным рядом*.

*Статистическим распределением (рядом) выборки* называют перечень вариант  вариационного ряда и соответствующих им частот  (сумма всех частот равна объему выборки *n*) или относительных частот  (сумма всех относительных частот равна единице).

Различают *дискретный (точечный) и интервальный (сгруппированный)* статистический ряд.

### Дискретный статистический ряд

**Пример 1.1.**  Дана выборка, состоящая из чисел: 3.2, 4.1, 8.1, 8.1, 6.7, 4.4, 4.4, 3.2, 5.0, 6.7, 6.7, 7.5, 3.2, 4.4, 6.7, 6.7, 5.0, 5.0, 4.4, 8.1. Составить статистический ряд распределения абсолютных и относительных частот.

***Решение.*** Объем выборки *п* = 20. Перепишем варианты в порядке возрастания: 3.2, 3.2, 3.2, 4.4, 4.4, 4.4, 4.4, 4.4, 5.0, 5.0, 5.0, 6.7, 6.7, 6.7, 6.7, 6.7, 7.5, 8.1, 8.1, 8.1.

Из данного *вариационного ряда* видно, что выборка состоит всего из шести вариант. Поэтому составим т.н. *дискретный (точечный)* *статистический ряд*:

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *i* | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|  | 3,2 | 4,4 | 5,0 | 6,7 | 7,5 | 8,1 |
|  | 3 | 5 | 3 | 5 | 1 | 3 |  |
|  | 0 | 3 | 8 | 11 | 16 | 17 | 20 |
|  | 0,15 | 0,25 | 0,15 | 0,25 | 0,05 | 0,15 |  |
|  | 0 | 0,15 | 0,4 | 0,55 | 0,8 | 0,85 | 1 |

Здесь ряд дополнен накопленными частотами и частостями, где

 - частота (абсолютная);

 - относительная частота (частость);

; , для i>1 - накопленные частоты;

; , для i>1 - накопленные частости.

По статистическому ряду можно построить *полигон* абсолютных или относительных частот, а также *эмпирическую (выборочную) функцию распределения* признака

,

где  – количество элементов выборки, меньших чем .

 есть относительная частота появления события  в  независимых испытаниях. Главное различие между  и  состоит в том, что  определяет вероятность события , а  – накопленную относительную частоту этого события.

Для дискретного статистического ряда функция  является "ступенчатой" и задается аналитически следующим соотношением:



На рисунке 1 представлены полигон и эмпирическая функция распределения  относительных частот для статистического ряда примера 1.1

Рисунок 1.1 - Эмпирическая функция распределения

### Интервальный статистический ряд

Если имеется выборка значений *непрерывного* количественного признака, где число вариант очень велико, то составляется *сгруппированный (интервальный) статистический ряд*. Для его получения интервал (*a*, *b*), содержащий все варианты, делится на *k* равных частей длины *h*, и в качестве абсолютных частот выступают количества вариант, попавших в данный интервал.

*Количество интервалов* *k* следует выбирать так, чтобы построенный ряд не был громоздким, но в то же время позволял выявлять характерные изменения случайной величины.

Для вычисления *k* рекомендуется использовать формулу Стерджеса:

 или , где 

с округлением *k* до ближайшего целого значения.

Необходимо, чтобы интервал (*a*, *b*) статистического ряда длины *kh* c небольшим "нахлестом" перекрывал вариационный размах наблюдаемого признака

, т.е. чтобы ,

поэтому длину частного интервала выбирают из неравенства

,

где  – наибольшее и наименьшее значения признака.

После нахождения частных интервалов определяется, сколько значений случайной величины попало в каждый конкретный интервал

,

где *k* − число интервалов.

При этом в интервал включают значения, большие или равные нижней границе и меньшие верхней границы.

Для наглядного представления о распределении наблюдаемого непрерывного признака *Х*, исследуемого по выборке, дает***гистограмма*** – столбчатая диаграмма, состоящая из прямоугольников, основания которых – частичные интервалы длины *h*, а высоты – плотности абсолютных  или относительных  частот (частостей). Гистограмма является статистическим аналогом плотности распределения *f(x)*, при этом общая площадь гистограммы относительных частот (частостей) равна единице, а гистограммы абсолютных частот - объему выборки.

**Пример 1.2.** Отклонение диаметра вала после шлифовки от номинального значения в мм представлено следующей выборкой (объемом ):

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| -0,84 | 0,26 | 0,88 | -0,33 | 0,72 | -0,44 | 0,93 |
| -0,14 | 0,71 | -0,99 | 1,21 | 0,31 | -0,29 | 0,79 |
| 0,34 | 0,38 | -0,54 | 1,81 | 1,13 | 0,28 | 1,22 |
| 0,79 | -0,89 | 0,89 | -0,49 | -0,03 | 0,44 | -0,35 |
| -0,3 | 1,34 | -0,8 | -0,32 | 1,15 | -0,41 | 0,76 |
| 0,25 | -0,18 | -0,41 | 0,96 | -0,63 | 0,86 | 0,8 |
| -0,61 | -0,65 | -0,03 | 1,72 | 1,96 | 0,45 | -0,6 |
| 1,15 | 0,19 | 0,35 | 0,5 | 0,77 | 0,91 | -0,26 |
| 0,51 | 1,36 | -0,01 | 0,42 | 0,63 | -0,14 | 0,1 |
| -0,08 | -0,97 | 0,55 | 0,38 | 0,86 | -0,57 |

Необходимо построить интервальный вариационный ряд, гистограмму относительных частот и эмпирическую функцию распределения (кумуляту).

***Решение.***

1. Определим количество частных интервалов по формуле :

. Примем .

1. Выполним ранжирование вариант в порядке возрастания.
2. Определим длину частного интервала по формуле :

; ;

. Примем .

1. Проверим выполнение условия :

; ; .

При этом, "нахлест" диапазона статистического ряда составляет . Это значение определяет максимальное смещение влево от  начала интервала (*a*, *b*) статистического ряда. В рассматриваемом примере смещение удобно принять *0,01*, т.е. левую границу примем

,

тогда правая граница

.

1. Определим границы частичных интервалов по формуле :

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| -1 | -0,57 | -0,14 | 0,29 | 0,72 | 1,15 | 1,58 | 2,01 |

1. Подсчитав количество вариант, попавших в соответствующие интервалы, получим искомый интервальный статистический ряд:

Таблица 1.1

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *i* | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |  |
| *Х* | [-1,00;  -0,57) | [-0,57;  -0,14) | [-0,14;  0,29) | [0,29;  0,72) | [0,72;  1,15) | [1,15;  1,58) | [1,58;  2,01) |  |
|  | 9 | 13 | 11 | 13 | 14 | 6 | 3 |  |
|  | 0,130 | 0,188 | 0,159 | 0,188 | 0,203 | 0,087 | 0,043 |  |
|  | 0,303 | 0,438 | 0,371 | 0,438 | 0,472 | 0,202 | 0,101 |  |
|  | 0 | 0,130 | 0,319 | 0,478 | 0,667 | 0,870 | 0,957 | 1 |

1. Используя интервальный ряд (см. табл. 1), построим гистограмму плотностей относительных частот , и эмпирическую функцию распределения , которые представлены на рисунке 1.2.

Рисунок 1.2 - Гистограмма и эмпирическая функция распределения

Гистограмма плотностей относительных частот (частостей) является статистическим аналогом (оценкой) плотности распределения вероятности *f(x)* непрерывной случайной величины - *суммарная площадь прямоугольников равна единице*.

Эмпирическая функция распределения  для интервального статистического ряда является, как видно из рисунка 1.2, кусочно-линейной. При этом, она равна нулю в начале первого частного интервала и единице - в конце последнего.

## Первичная обработка в Excel

После внесения информации в электронную таблицу необходимо определить минимальный и максимальный варианты, размах вариационного ряда, количество вариант и число частных интервалов, например по формуле Стерджеса, и их границы. Затем вычислить частоты *ni*. Эти операции можно сделать с помощью обычной сортировки. Существуют также встроенные специальные статистические функции.

***Для вычисления частот ni*** можно использовать ***функцию ЧАСТОТА***, обращение к которой имеет вид:

=ЧАСТОТА(*массив\_данных;массив\_интервалов*),

где *массив\_данных* – адреса ячеек, для которых вычисляется частота  - количество вариант, меньших или равных граничному значению  (сравните с ); *массив\_границ* – адреса ячеек, в которых размещаются упорядоченные по возрастанию значения , где  – число интервалов.

*Особенности.*

Количество элементов в возвращаемом массиве на единицу больше числа элементов в массиве "*массив\_интервалов*". Дополнительный элемент в возвращаемом массиве содержит количество значений, превышающих верхнюю границу интервала, содержащего наибольшие значения.

Функция ЧАСТОТА вводится как формула массива, т.е. предварительно выделяется интервал ячеек, в который будут помещены вычисленные частоты (число ячеек должно быть на 1 больше числа границ), затем вводится функция ЧАСТОТА с соответствующими аргументами, потом одновременно нажимаются клавиши [Ctrl] + [Shift] + [Enter].

***Функция МАКС*** вычисляет максимальное значение из заданных аргументов. Обращение к ней имеет вид:

=МАКС(*арг1; арг2; …; арг255*),

где *арг1; арг2; …; арг255* – числовые константы или адреса ячеек, содержащих числовые величины.

***Функция МИН*** вычисляет минимальное значение из заданных аргументов. Обращение к ней имеет вид:

=МИН(*арг1; арг2; …; арг255*),

где *арг1; арг2; …; арг255* – числовые константы или адреса ячеек, содержащих числовые величины.

Для подсчета количества элементов выборки (т.е. объема выборки) использовалась ***функция СЧЁТ***, обращение к которой имеет вид:

СЧЁТ(*массив\_данных*),

где *массив\_данных* – адреса ячеек или числовые константы.

***Построение гистограммы*** частот и частостей возможно как с использованием стандартных инструментов Excel (Вставка-Гистограмма), так и с помощью специального инструмента из вкладки *Данные-Анализ данных,* в которой следует выбрать пункт *Гистограмма*.

Появится окно гистограммы, показанное на рисунке 1.3.

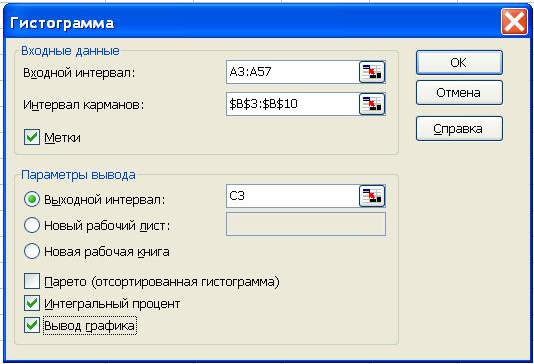


Рисунок 1.3 - Диалоговое окно режима ***Гистограмма***

В окне задаются следующие параметры:

*Входной интервал*: – адреса ячеек, содержащие выборочные данные.

*Интервал карманов*: (необязательный параметр) – адреса ячеек, содержащие границы интервалов (кармана). Эти значения должны быть введены в возрастающем порядке.

Если границы интервалов не заданы, то автоматически будет создан набор интервалов с одинаковой длиной

,

где  – целая часть величины ,  – объем выборки.

*Метки* – флажок, включаемый, если первая строка во входных данных содержит заголовки. Если заголовки отсутствуют, то флажок следует выключить.

*Парето* (*отсортированная гистограмма*) – устанавливается в активное состояние, чтобы представить  в порядке их убывания. Если параметр выключен, то  приводятся в порядке следования интервалов.

*Интегральный процент* – устанавливается в активное состояние для расчета выраженных в процентах накопленных относительных частот (процентный аналог значений выборочной функции распределения.

Результатом использования описываемого инструмента для данных **примера 1.2** является гистограмма, представленная на рисунке 1.4 (сравните этот результат с таблицей 1.1 и рисунком 1.2).

Таблица 1.2

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| *h* | *Частота* | *Интегральный %* |
| -1 | 0 | 0,00% |
| -0,57 | 8 | 11,76% |
| -0,14 | 13 | 30,88% |
| 0,29 | 11 | 47,06% |
| 0,72 | 14 | 67,65% |
| 1,15 | 15 | 89,71% |
| 1,58 | 4 | 95,59% |
| 2,01 | 3 | 100,00% |
| Еще | 0 | 100,00% |

*Особенность.*

Столбцы гистограммы и "Интегральный %" строятся по серединам частных интервалов.

Построенная гистограмма является ненормированной: высоты прямоугольников в ней равны частостям , а не их плотностям . В этом случае единице равна сумма высот всех прямоугольников, а не сумма их площадей. Поэтому ненормированная гистограмма не может служить оценкой для плотности распределения случайной величины, из значений которой была сформирована выборка (особенно в случае неравных длин интервалов) [5].

Поэтому для построения гистограммы и эмпирической функции распределения рекомендуется использовать стандартные инструменты Excel.

Рисунок 1.4 - График построенной гистограммы

### ЗАДАЧИ

ЗАДАЧА 442. Построить полигон относительных частот. Найти и построить эмпирическую функцию по данному дискретному распределению:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| *i* | 1 | 2 | 3 | 4 |
|  | 2 | 5 | 7 | 8 |
|  | 1 | 3 | 2 | 4 |  |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |

ЗАДАЧА 449. Построить гистограмму относительных частот и эмпирическую функцию по данному интервальному распределению:

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Номер интервала | Частичный интервал | Частоты | | Частости | | Плотности | |
|  |  |  |  |  |  |
| 1 | 10-15 | 2 |  |  |  |  |  |
| 2 | 15-20 | 4 |  |  |  |  |  |
| 3 | 20-25 | 8 |  |  |  |  |  |
| 4 | 25-30 | 4 |  |  |  |  |  |
| 5 | 30-35 | 2 |  |  |  |  |  |
| Сумма | |  |  |  |  |  |  |

# ОЦЕНКИ ПАРАМЕТРОВ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

## Требования к оценкам

Любая оценка (приближенное значение) параметра распределения вычисляется в статистике как функция случайных вариант наблюдаемого признака, а потому сама является в определенной мере случайной.

К статистическим оценкам обычно предъявляются требования:

- *состоятельности* - при увеличении числа наблюдений *n* она должна приближаться (сходиться по вероятности) к истинному значению параметра;

- *несмещенности* - ее математическое ожидание должно равняться значению параметра (отсутствие систематической ошибки);

- *эффективности* - среди всех несмещенных оценок выбранная должна обладать наименьшей дисперсией.

## Точечные оценки M(X) и D(X)

По имеющейся выборке можно дать оценку математического ожидания и дисперсии генеральной совокупности. Несмещенной оценкой математического ожидания служит ***выборочное среднее***

 ,

то есть среднее арифметическое всех элементов выборки.

Оценкой дисперсии может служить ***выборочная дисперсия***

.

Более удобна формула - *средний квадрат минус квадрат среднего*:

.

Выборочная дисперсия - смещенная в сторону занижения оценка генеральной дисперсии , и ее математическое ожидание  Поэтому вводится несмещенная оценка генеральной дисперсии – ***исправленная выборочная дисперсия***



Соответственно  является ***исправленным выборочным средним квадратическим отклонением*.**

**Замечание 1.** Если первоначальные варианты  — большие числа, то для упрощения расчета целесообразно вычесть из каждой варианты одно и то же число *С*, т. е. перейти к *условным вариантам*  (в качестве *С* выгодно принять число, близкое к выборочной средней; поскольку выборочная средняя неизвестна, число *С* выбирают «на глаз»).

Тогда для выборочного среднего справедливо

  или ;

выборочная дисперсия при этом не изменится

**Замечание 2.** Если первоначальные варианты являются десятичными дробями с *k* десятичными знаками после запятой, то, чтобы избежать действий с дробями, умножают первоначальные варианты на постоянное число , т.е. переходят к *условным вариантам* . При этом выборочное среднее увеличится в *С* раз, а дисперсия - в  раз, поэтому справедливы выражения:

 ; 

**Пример 2.1**. Найти выборочное среднее, исправленную выборочную дисперсию и исправленное выборочное среднее квадратическое отклонение для выборок, заданных в примере 1.1.

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *xi* | 3,2 | 4,4 | 5,0 | 6,7 | 7,5 | 8,1 |
| *ni* | 3 | 5 | 3 | 5 | 1 | 3 |
| *wi* | 0,15 | 0,25 | 0,15 | 0,25 | 0,05 | 0,15 |

Решение.





*Замечание.* В интервальном статистическом ряде вариантами следует считать середины частичных интервалов.

## Другие характеристики вариационного ряда

Кроме выборочной средней и выборочной дисперсии применяются и другие характеристики вариационного ряда. Укажем главные из них.

**Медианой *Ме*** называют варианту, которая делит вариационный ряд на две части, равные по числу вариант. Если число вариант нечетно, т. е. *n=2k+1*, то , если четно, т.е. *n = 2k*, то .

Для интервального ряда медиане соответствует значение кумуляты частостей равное 0,5, поэтому используют формулу , которая получена из подобия треугольников, показанных на рис. 2.1

|  |  |
| --- | --- |
| Рисунок 2.1 - К определению медианы *Ме* | ; ;  ,  где  - начало интервала, содержащего медиану; ,  - частость и накопленная частость медианного и предмедианного интервалов соответственно. |

**Модой *Мо*** называют варианту, которая имеет наибольшую частоту.

Для интервального ряда используют формулу , которая получена из подобия треугольников, показанных на рис. 2.2.

|  |  |
| --- | --- |
| Рисунок 2.2 - К определению моды *Мо* | ; ;  ,  где  - начало интервала, содержащего моду; , ,  - частоты предмодального, модального и постмодального интервалов соответственно. |

**Размахом варьирования *R*** называют разность между наибольшей и наименьшей вариантами:

.

**Коэффициент вариации *V*** - безразмерная величина, которая характеризует в процентах долю выборочного СКО от выборочной средней:

.

## Вычисление точечных оценок в Excel

Для вычисления выборочного среднего используется ***функция СРЗНАЧ***, обращение к которой имеет вид:

=СРЗНАЧ(*арг1; арг2; …; арг255*),

где *арг1; арг2; …; арг255* – числа или адреса ячеек (не более 225), содержащих числовые данные. Если ячейка содержит текстовые, логические значения или ячейка пуста, то такие ячейки игнорируются.

Для вычисления выборочной и исправленной дисперсий используются ***функции ДИСПР*** и ***ДИСП соответственно,*** обращение к которым имеет вид:

=ДИСПР(*арг1; арг2; …; арг255*);

=ДИСП(*арг1; арг2; …; арг255*).

Для вычисления суммы квадратов отклонений  используется ***функция КВАДРОТКЛ***, обращение к которой имеет вид:

=КВАДРОТКЛ(*арг1; арг2; …; арг255*).

Для вычисления ***выборочного и исправленного СКО*** используются соответственно функции:

=СТАНДОТКЛОНП (*арг1; арг2; …; арг255*);

=СТАНДОТКЛОН (*арг1; арг2; …; арг255*).

Находят применение также следующие встроенные функции.

***Функция ЭКСЦЕСС*** вычисляет оценку



для характеристики *эксцесс *, которая определяет островершинность или плосковершинность плотности распределения.

***Функция МОДА*** вычисляет наиболее часто встречающееся значение в заданных аргументах функции, т.е. значение, встречающееся в выборке с максимальной частотой.

Если в заданных значениях аргументов ***нет повторяющихся значений***, то функция возвращает признак ошибки #Н/Д.

***Функция МЕДИАНА*** вычисляет значение выборки, приходящееся на середину упорядоченной выборочной совокупности. Если выборка имеет четное число элементов, то значение функции будет равно среднему двух значений, находящихся по середине упорядоченной выборочной совокупности.

***Функция СКОС*** вычисляет оценку



для характеристики асимметрии , которая для симметричной плотности распределения равна 0.

Основные характеристики положения, разброса и асимметрии можно также вычислить, используя вкладку ***Данные - Анализ данных - Описательная статистика*** *пакета анализа*.

В появившемся диалоговом окне Описательная статистика параметр *Уровень надежности*  включается, если необходимо вычислить доверительный интервал для математического ожидания с задаваемым () уровнем надежности . *Уровень надежности* – определяет величину , от которой зависит доверительный интервал для математического ожидания, имеющий вид

,

где  – выборочное среднее (подробнее см. Интервальные оценки).

Назначение остальных параметров достаточно очевидно.

### ЗАДАЧИ

ЗАДАЧА 451. Из генеральной совокупности извлечена выборка объема :

 1 3 6 26

 8 40 10 2

Найти несмещенную оценку генеральной средней.

ЗАДАЧА 453. Найти выборочную среднюю по данному распределению выборки объема :

 1250 1270 1280

 2 5 3 (Перейти к условным вариантам )

ЗАДАЧА 456. По выборке объема  найдена смещенная оценка  генеральной дисперсии. Найти несмещенную оценку дисперсии генеральной совокупности.

ЗАДАЧА 458. В итоге четырех измерений некоторой физической величины одним прибором (без систематических ошибок) получены следующие результаты: 8; 9; 11; 12. Найти: а) выборочную среднюю результатов измерений; б) выборочную и исправленную дисперсии ошибок прибора.

*Указание. Перейти к условным вариантам .*

ЗАДАЧА 457. В итоге пяти измерений длины стержня одним прибором (без систематических ошибок) получены следующие результаты (в мм): 92; 94; 103; 105; 106. Найти: а) выборочную среднюю длину стержня; б) выборочную и исправленную дисперсии ошибок прибора.

*Указание. Перейти к условным вариантам .*

ЗАДАЧА 459. Ниже приведены результаты измерения роста (в см) случайно отобранных 100 студентов.

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Рост | 154-158 | 158-162 | 162-166 | 166-170 | 170-174 | 174-178 | 178-182 |
| среднее |  |  |  |  |  |  |  |
| Число  студентов | 10 | 14 | 26 | 28 | 12 | 8 | 2 |
| *u = x-170* |  |  |  |  |  |  |  |
| *u2* |  |  |  |  |  |  |  |

Найти выборочную среднюю и выборочную дисперсию роста обследованных студентов.

*Указание.* Найти середины интервала и принять их в качестве вариант.

ЗАДАЧА 463. Найти выборочное среднее и выборочную дисперсию по данному распределению выборки объема *n=10*:

** 0,01 0,04 0,08

** 5 3 2

*Указание. Перейти к условным вариантам .*

## Интервальные оценки

Точечная оценка при малом объеме выборки может существенно отличаться от оцениваемого параметра, поэтому важно знать, насколько истинное значение параметра может отклоняться от найденной точечной оценки. Интервал вида  где *Ө­* - истинное значение оцениваемого параметра, а *Ө*\* - его точечная оценка, называется *доверительным интервалом*, а вероятность  - *доверительной вероятностью* или *надежностью*. Для построения доверительного интервала требуется знать закон распределения исследуемой случайной величины , как показано на рисунке 2.3.



Рисунок 2.3 - К определению интервальной оценки 

### Некоторые статистические распределения

Генеральные совокупности часто имеют нормальный закон распределения. В этом случае многие выборочные характеристики, в том числе , выражаются через небольшое число специальных распределений. Как правило, в математической статистике используются не плотности этих распределений, а некоторые их числовые характеристики, представленные таблицами. Чаще всего в качестве такой характеристики выступает либо квантиль распределения [5], либо критическая точка распределения.

*Квантилем уровня р * или *р-квантилем* случайной величины *Х* называется такое число , что вероятность  равна заданной величине *р.*

Критической точкой распределения случайной величины *Х* (для правосторонней критической области)называют такое число , что вероятность  равна заданной величине *- уровню значимости.*

Таким образом квантиль определяет границу площади "левого хвоста" под плотностью распределения, а критическая точка - подобную границу площади, но "правого хвоста" под плотностью распределения, как показано на рисунке 2.4.



Рисунок 2.4 - К определению квантиля  и критической точки  распределения (если , как на рисунке, то )

#### *Распределение (распределение К. Пирсона).*

Рассмотрим несколько распределений, которым подчиняются выборочные характеристики и которые используются для построения интервальных оценок.

Пусть  *–* независимые нормально распределенные случайные величины с параметрами N(0,1). Распределение случайной величины



называется *распределением  с п степенями свободы.*

Заметим, что количество степеней свободы *п* является единственным параметром -распределения и значения  неотрицательны, т.е. ****.

Определим математическое ожидание величины *.*

По определению имеем

,

так как . Но , , а значит, *.*

Вычислим дисперсию случайной величины . Так как случайные величины  независимы, то

.

Плотность распределения случайной величины *N*1 равна , значит,

.

Последний интеграл вычисляется методом интегрирования по частям. Да­лее, так как , то . Таким образом, **-**распределение с *п* степенями свободы имеет следующие числовые ха­рактеристики:

.

Согласно центральной предельной теореме, если случайные величины  независимы, одинаково распределены и имеют конечные дис­персии, то последовательность  асимптотически нормальна. Другими словами, при больших значениях *п* распределение случайной величины  близко к нормальному распределению с параметрами *.* Однако при малых значениях *п* функция плотности случайной величины  значительно отличается от кривой Гаусса.

На рисунке 2.5 показаны плотности распределения *f*(*x*) случайной величины  при   и .

Рисунок 2.5 - Плотность распределения 

Видно, что при увеличении  плотность *f*(*x*) "приближается" к плотности нормального распределения.

*Замечательное свойство распределения* : сумма независимых случайных величин  также распределена по закону с  степенями свободы.

#### *Распределение Стьюдента (t-распределение).*

Пусть  – нормально распределенная случайная величина с параметрами  (z-статистика), а  *–* независимая от  случайная величина, подчиняющаяся распределению  с  степенями свободы. Тогда распределение случайной величины



называется *t-распределением* или *распределением Стьюдента.* Сама слу­чайная величина называется *t*-*величиной с п степенями свободы.*

При больших значениях *п* кривая  близка к кривой нормального распределения . Поэтому в практических расчетах при *п >* 30 часто считают, что .

Функция плотности  симметрична относительно оси ординат.

|  |  |
| --- | --- |
|  | Рисунок 2.6 - Плотности *z-* и *t-*распределений |

#### *Распределение Фишера (F-распределение).*

Пусть  и  – независимые случайные величины, имеющие -распределение с *п* и *m* степенями свободы соответственно. Распределение случайной величины



называется *F-распределением* или *распределением Фишера* с *п* и *m* степенями свободы, а сама величина –величиной. Так как случайные величины  и  то .

|  |  |
| --- | --- |
|  | Рисунок 2.7 -  Плотность F-распределений со степенями свободы *2 и 3, 5 и 10, 20 и 30* соответственно. |

Из рисунка 2.7 видно, что с увеличением или одной или другой степени свободы плотность распределения становится более узкой и высокой со средним значением равным единице.

### Теорема о распределении выборочных характеристик

**Теорема** о распределении выборочных характеристик  и  (доказана Р. Фишером) [5].

Если генеральная совокупность *Х* распределена по нормальному закону с параметрами , то:

а) случайная величина  распределена нормально с параметрами

;

б)  имеет распределение 

;

в) случайные величины  и  независимы.

Ограничимся доказательством утверждения а). Очевидно, что  есть линейная комбинация



независимых, нормально распределенных случайных величин. Как отме­чалось в курсе теории вероятностей, в этом случае случайная величина распределена нормально. Имеем

,

.

Тем самым первое утверждение теоремы доказано.

Как следует из в), используя случайные величины  и , можно составить случайную величину . Действительно, пронормировав , получим . Так как  и  независимы, то по

.

Итак, мы получили

**Следствие*.*** Если условия теоремы о распределении выборочных характеристик выполнены, то случайная величина



имеет распределение Стьюдента с () степенями свободы.

Здесь использовано выражение для исправленной дисперсии .

### Интервальные оценки математического ожидания нормального распределения

Пусть генеральная совокупность *Х* распределена ***по нормальному закону*** , причем ***параметр  известен***, а параметр  требуется оценить с надежностью . По теореме о распределении выборочных характеристик случайная величина  распределена по закону  с плотностью вероятностей  и называется *z-статистикой*.

На рисунке 2.8 изображены графики плотностей случайной величины , распределенной по  и *z-статистики,* распределенной по .



Рисунок 2.8 - К построению доверительных интервалов

Зададимся требуемой надежностью  оценки *а* и, полагая известными  и объем выборки *n,* определим точность оценки  - ширину доверительного интервала

,

где  - искомый доверительный интервал.

Выражение эквивалентно следующему

,

которое определяет ***доверительный интервал (интервальную оценку) для математического ожидания а*** с точностью  и надежностью .

Значение  находится с использованием интегральной функции Лапласа , представленной в Приложении 2*.* Действительно,

.

По табл. П2 определяем значение *z*, удовлетворяющее уравнению

; .

**Пример 2.1**. Дана выборка значений нормально распределенной случайной величины: 2, 3, 3, 4, 2, 5, 5, 5, 6, 3, 6, 3, 4, 4, 4, 6, 5, 7, 3, 5. Найти с доверительной вероятностью *γ* = 0,95 границы доверительных интервалов для математического ожидания, если известно СКО распределения .

*Решение.*

Поскольку распределение нормальное и дисперсия известна , то для оценки  используем z-распределение. Найдем *n*=20,  = 4,25. По таблице Прил.2 определим аргумент *t=*1,96, при котором функции Лапласа  . Тогда из формулы

;

; .

***Минимальный объем выборки n***, при котором оценку математического ожидания *а* можно получить с заданной надежностью  и точностью .

Интервальная оценка *а* зависит от трех взаимосвязанных параметров: надежности , точности  и объема выборки *n*. Задаваясь двумя из них можно определить оставшийся.

Пусть . Тогда на основании формулы ***минимальный объем выборки n***, гарантирующий оценку математического ожидания *а* с заданной надежностью  и точностью  определяется неравенствами

, .

**Пример 2.2**. Найти минимальный объем выборки, при котором с надежностью 0,95 точность оценки математического ожидания *а* генеральной совокупности по выборочной средней равна , если известно СКО  нормально распределенной генеральной совокупности.

*Решение.*

По таблице Прил.2 определим аргумент *t=*1,96, при котором функции Лапласа  . Тогда по формуле

. Т.о., .

***При неизвестном СКО и объеме выборки ***, для нормального ЗР, на основании теоремы имеем

.

Поэтому доверительный интервал для математического ожидания при заданной надежности *γ* определяется так:



Здесь *s* – исправленное выборочное среднее квадратическое отклонение, а  критическая точка распределения Стьюдента, определяемая выражением  где  – количество степеней свободы. Значения  можно найти из таблицы Приложения 3 по известным *п* и *γ*.

***При неизвестном СКО и объеме выборки ***, для нормального ЗР, полагают, что распределение Стьюдента несущественно отличается от нормального. Поэтому для оценки математического ожидания применяют формулу , где вместо  используют *s*.

**Пример 2.3**. Дана выборка значений нормально распределенной случайной величины: 2, 3, 3, 4, 2, 5, 5, 5, 6, 3, 6, 3, 4, 4, 4, 6, 5, 7, 3, 5. Найти с доверительной вероятностью *γ* = 0,95 границы доверительного интервала для математического ожидания.

*Решение.*

Поскольку объем выборки небольшой *п* = 20 и дисперсия не известна, то для оценки  используем распределение Стьюдента. Найдем  = 4,25, *s* = 1,37. По таблице Прил.3 определим . Тогда по формуле

; 

- доверительный интервал для математического ожидания.

### Интервальные оценки дисперсии нормального распределения

Как и при построении интервальных оценок для математического ожида­ния, в данном случае также необходимо определить статистику (функцию от наблюдаемых вариант), распределение которой было бы известно и включало бы оцениваемый параметр *.*

В соответствии с теоремой о распределении выборочных характеристик такой статистикой может быть случайная величина  или , распределенная по закону  с  степенями свободы. Заметим, что распределение , в отличие от распределения Стьюдента, не является симметричным, поэтому для доверительного интервала целесообразно выбрать два предела  и  так, чтобы площади "хвостов" были равными  [5]

,

где  – надежность интервальной оценки;

 – критическая точка -распределения уровня  (или квантиль уровня ),  – критическая точка уровня  (или квантиль уровня ). Таблица критических точек представлена в Приложении 4.

|  |  |
| --- | --- |
|  | Рисунок 2.9 - К построению  доверительных интервалов |

На основании равенств

 или ,

интервал

 или 

***является интервальной оценкой для  надежности .***

Границы интервалов являются случайными величинами и с вероятностью  накрывают неизвестную дисперсию .

**Пример 2.4.**  По выборке объема *п* = 20 из нормально распределенной генеральной совокупности вычислено значение выборочной дисперсии . Построить интервальную оценку для параметра  с надежностью  = 0,96.

*Решение.* Значения ,  находим из условий :



Т.е.  есть критическая точка -распределения с 19 степенями свободы уровня 0,98, а  – критическая точка уровня 0,02.

По табл. Приложения 4 критических точек -распределения находим

; .

Тогда интервальная оценка  принимает вид

.

Подставляя вычисленное значение , получаем

,

откуда оценка СКО 

### Интервальная оценка вероятности события

Точечной оценкой вероятности *р* события является частность , где *п –* общее число независимых испытаний, а *m* – число испытаний, в которых произошло событие *А.*

Зададимся надежностью интервальной оценки  и найдем числа ,  такие, чтобы выполнялось соотношение

.

***Интервальная оценка вероятности при большом числе испытаний.*** Если  и , то распределение случайной величины  можно аппроксимировать нормальным распределением . Следовательно, при этих же условиях распределение величины  близко к нормальному с нулевым математическим ожиданием и единичной дисперсией, т.е.

.

По аналогии с , найдем такое число *t*, для которого справедливо равенство

.

Это число *t* является корнем уравнения , где  – функция Лапласа, и корень может быть найден с помощью табл. П2.

Неравенство, стоящее в скобках выражения , разрешим относительно *р.* Для этого неравенство перепишем в виде эквивалентного неравенства . Возведем в квадрат, в результате получим . Далее, возведя в квадрат  и перенеся все члены влево, получим

.

Корни  и  этого квадратного трехчлена ***являются границами интервальной оценки***  ***вероятности события*** и определяются выражениями





где *n* — общее число испытаний; *m* — число появлений события; *w* — относительная частота; *t* — значение аргумента функции Лапласа (приложение 2), при котором  ( — заданная надежность).

Если *п >>* 100, то в формулах слагаемым  можно пренебречь, тогда для вычисления  можно использовать приближенные формулы, аналогичные :

**Пример 2.5.** Событие *А* в серии из *п =* 100 испытаний произошло *т* = 78 раз. Построить интервальную оценку для вероятности *р* события с надежностью .

*Решение.* Значение точечной оценки вероятности *р* равно . По табл. П2 определяем для   и вычисляем по формулам значения  при : . Таким образом, доверительный интервал для вероятности *р* события *А* следующий: (0,705; 0,848).

***Интервальная оценка вероятности при малом числе испытаний (n<30).*** При малом числе испытаний *п* предположение о приближенном распределении случайной величины *m* по нормальному закону  становится несправедливым. Для описания распределения величины  необходимо использовать формулу Бернулли:

.

Можно показать, что граничные точки интервальной оценки являются решениями следующих нелинейных уравнений:

; ,

где – надежность интервальной оценки.

Корни этих уравнений могут быть найдены одним из численных методов решения нелинейных уравнений. Кроме этого, существуют специальные таблицы для нахождения . В данном пособии они не приводятся.

## Вычисление границ доверительных интервалов в Excel

**Вычисление величины **, входящей в доверительный интервал  оценки математического ожидания .

В Excel реализована не функция Лапласа (см. Прил.2), а интегральная функции стандартного нормального распределения , где . Поэтому величина  вычисляется с помощью функции НОРМСТОБР(р) следующим образом:

****, где  – надежность интервальной оценки.

**Вычисление величины**  осуществляется с помощью функции ДОВЕРИТ:

,

где ,  – известное СКО,  – объем выборки.

**Вычисление ** **критической точки распределения Стьюдента** , определяемой выражением  осуществляют с использованием функции СТЬЮДРАСПОБР, обращение к которой имеет вид:

,

где ,  – *число степеней свободы*.

**Вычисление критических точек распределения Пирсона** , , входящих в доверительный интервал , для дисперсии  выполняется с использованием функции ХИ2ОБР:

; ,

где ,  – надежность интервальной оценки.

### ЗАДАЧИ

ЗАДАЧА 501. Найти доверительный интервал для оценки с надежностью 0,95 неизвестного математического ожидания *а* нормально распределенного признака *X* генеральной совокупности, если генеральное СКО , выборочная средняя  и объем выборки .

ЗАДАЧА 502. Найти доверительный интервал для оценки с надежностью 0,99 неизвестного математического ожидания *а* нормально распределенного признака *X* генеральной совокупности, если известны генеральное среднее квадратическое отклонение , выборочная средняя  и объем выборки n: а), , ; б), , .

ЗАДАЧА 506. Найти минимальный объем выборки, при котором с надежностью 0,975 точность оценки математического ожидания *а* генеральной совокупности по выборочной средней равна, если известно СКО  нормально распределенной генеральной совокупности.

ЗАДАЧА 507. Найти минимальный объем выборки, при котором с надежностью 0,925 точность оценки математического ожидания нормально распределенной генеральной совокупности по выборочной средней равна 0,2, если известно среднее квадратическое отклонение генеральной совокупности .

ЗАДАЧА 508. Из генеральной совокупности извлечена выборка объема :

варианта  - 2 1 2 3 4 5

частота  2 1 2 2 2 1

Оценить с надежностью 0,95 математическое ожидание *а* нормально распределенного признака генеральной совокупности по выборочной средней при помощи доверительного интервала.

ЗАДАЧА 509. Из генеральной совокупности извлечена выборка объема :

варианта  -0,5 -0,4 -0,2 0 0,2 0,6 0,8 1 1,2 1,5

частота  1 2 1 1 1 1 1 1 2 1

Оценить с надежностью 0,95 математическое ожидание *а* нормально распределенного признака генеральной совокупности с помощью доверительного интервала.

ЗАДАЧА 510. По данным девяти независимых равноточных измерений некоторой физической величины найдены среднее арифметическое результатов измерений  и «исправленное» среднее квадратическое отклонение. Оценить истинное значение измеряемой величины с помощью доверительного интервала *с* надежностью . Предполагается, что результаты измерений распределены нормально.

ЗАДАЧА 512. По данным выборки объема  из генеральной совокупности найдено «исправленное» среднее квадратическое отклонение  нормально распределенного количественного признака. Найти доверительный интервал, покрывающий генеральное среднее квадратическое отклонение  с надежностью 0,95.

ЗАДАЧА 514. Произведено 12 измерений одним прибором (без систематической ошибки) некоторой физической величины, причем «исправленное» среднее квадратическое отклонение *s* случайных ошибок измерений оказалось равным 0,6. Найти точность прибора с надежностью 0,99. Предполагается, что результаты измерений распределены нормально.

ЗАДАЧА 522. При испытаниях 1000 элементов зарегистрировано 100 отказов. Найти доверительный интервал, покрывающий неизвестную вероятность *р* отказа элемента с надежностью: а) 0,95; б) 0,99.

# КОРРЕЛЯЦИОННЫЙ И РЕГРЕССИОННЫЙ АНАЛИЗ

## Линейная корреляция

Если в результате осуществления некоторого эксперимента наблюдаются две величины  и , то *выборочный корреляционный момент (ковариация) * величин  и  определяется формулой:



где  —  пар наблюденных значений, полученных в  независимых повторениях эксперимента,  .

*Выборочный коэффициент корреляции *:



где  и  - выборочные СКО

*Выборочные коэффициенты регрессий*

 *на : *;

* на :*  

*Выборочные уравнения линейных регрессий (среднеквадратических)*

 *на *: или  ****

 *на* :  или 

**Пример 3.1**. Для выборки двумерной случайной величины

Таблица 3.1

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *i* | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| *xi* | 1,2 | 1,5 | 1,8 | 2,1 | 2,3 | 3 | 3,6 | 4,2 | 5,7 | 6,3 |
| *yi* | 4,6 | 5,8 | 7,3 | 10,4 | 12,30 | 14,4 | 14,9 | 14,8 | 15,2 | 16,5 |

вычислить выборочные средние наблюдаемых признаков, выборочные средние квадратические отклонения, выборочный коэффициент корреляции и составить выборочные уравнения линейных регрессий. Представить корреляционное поле и линейные регрессии на графике.

*Решение.*

*Удобно исходную таблицу дополнить строкой xi yi и столбцом* ср.знч.

Таблица 3.2

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *i* | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | ср.знч |
| *xi* | 1,2 | 1,5 | 1,8 | 2,1 | 2,3 | 3 | 3,6 | 4,2 | 5,7 | 6,3 | 3,17 |
| *yi* | 4,6 | 5,8 | 7,3 | 10,4 | 12,30 | 14,4 | 14,9 | 14,8 | 15,2 | 16,5 | 11,62 |
| *xi yi* | 5,52 | 8,7 | 13,14 | 21,84 | 28,29 | 43,2 | 53,64 | 62,16 | 86,64 | 103,95 | 42,71 |

*Тогда искомые выборочные параметры распределения*









; 

*Выборочное уравнение линейной регрессии Y/Х имеет вид :*

* или .*

*Выборочное уравнение линейной регрессии Х/ Y имеет вид :*

* или .*

*Поскольку линии регрессии прямые, то строим их по двум крайним точкам*

Рисунок 3.1 - Линейные регрессии

Для вычисления корреляционного момента (ковариации) и коэффициента корреляции в табличном процессоре ***Excel*** используются функции ***КОВАР(массив1;массив2)*** и ***КОРРЕЛ(массив1;массив2)*** соответственно.

## Нелинейная корреляция

При совместном исследовании двух случайных величин по имеющейся выборке (*х*1, *у*2), (*х*2, *у*2),…,(*xk*, *yk*) возникает задача определения "наиболее подходящей", в том числе и нелинейной, зависимости между ними. Если вид функции  задан, то требуется найти такие значения коэффициентов *a*, *b*,..., при которых *yi* "наименее" отличаются от *f* (*xi*). В качестве критерия оптимальности часто используют минимум суммы квадратов ошибок

.

Коэффициенты *a*, *b*,... функции  и сама функция, обеспечивающие минимум критерия называются оптимальными в смысле метода наименьших квадратов для этого класса функций. При этом, для другого класса функций, например , критерий может принять значение еще более близкое к нулю. В этом случае функция , очевидно, лучше описывает статистическую взаимосвязь наблюдаемых признаков, нежели функция .

В качестве оценки тесноты нелинейной корреляционной связи используют коэффициент детерминации  (корреляционное отношение), который показывает долю объясненной изменением факторного признака дисперсии от общей дисперсии:

,

где  - общая (total) дисперсия результативного признака  - относительно общей средней .

 - объясненная (межгрупповая, explained) дисперсия - дисперсия точек линии регрессии  относительно общей средней ;

- остаточная (внутригрупповая, unexplained) дисперсия - дисперсия признака  относительно модельной линии регрессии .

Смысл коэффициента детерминации поясняется на рисунке 3.1.

Здесь .

Доказывается, что , т.к. .

|  |  |
| --- | --- |
|  | Рисунок 3.1 -  К пояснению суммы дисперсий |

Поэтому имеет место *правило сложения дисперсий* - общая дисперсия  результативного признака равна сумме объясненной (межгрупповой)  и остаточной (необъясненной, внутригрупповой)  дисперсии:



Из выражения следует пределы изменения значений :

.

Рассмотрим методику определения оптимальных по методу наименьших квадратов (МНК) параметров для некоторых классов функций (модельных регрессий).

а) Пусть модельной линией регрессии является линейная зависимость

.

В качестве критерия тесноты корреляционной связи используем сумму квадратов отклонений значений признака  относительно линии регрессии 

.

Определим неизвестные параметры регрессии  из условия минимума : .

; ;

; .

; ;

; .

 или .

.

б) Квадратичная зависимость . Приравнивая частные производные суммы квадратов ошибок к нулю, по аналогии с пунктом а) получим:

.

в) Логарифмическая зависимость . Вводя новую переменную  приводим логарифмическую зависимость к линейной. Тогда на основании выражений получим:

 или .

**Пример 3.2**. Найти параметры и построить линии регрессий *у* от *х* для выборки из предыдущего примера 3.1 (табл.3.2) для случаев:

1) линейной зависимости ;

2) квадратичной зависимости ;

3) логарифмической зависимости .

*Решение.*

В соответствие с - дополним исходную таблицу необходимыми строками и последним столбцом - ср.знч. После заполнения таблица примет вид (вычисления проводились в MS Excel):

Таблица 3.3

| *i* | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | ср.знач |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *xi* | 1,2 | 1,5 | 1,8 | 2,1 | 2,3 | 3 | 3,6 | 4,2 | 5,7 | 6,3 | 3,17 |
| *yi* | 4,6 | 5,8 | 7,3 | 10,4 | 12,30 | 14,4 | 14,9 | 14,8 | 15,2 | 16,5 | 11,62 |
| *xy* | 5,52 | 8,70 | 13,14 | 21,84 | 28,29 | 43,20 | 53,64 | 62,16 | 86,64 | 103,95 | 42,71 |
| *(x^2)y* | 6,62 | 13,05 | 23,65 | 45,86 | 65,07 | 129,60 | 193,10 | 261,07 | 493,85 | 654,89 | 188,68 |
| *x^2* | 1,44 | 2,25 | 3,24 | 4,41 | 5,29 | 9,00 | 12,96 | 17,64 | 32,49 | 39,69 | 12,84 |
| *x^3* | 1,73 | 3,38 | 5,83 | 9,26 | 12,17 | 27,00 | 46,66 | 74,09 | 185,19 | 250,05 | 61,53 |
| *x^4* | 2,07 | 5,06 | 10,50 | 19,45 | 27,98 | 81,00 | 167,96 | 311,17 | 1055,60 | 1575,30 | 325,61 |
| *z=lnx* | 0,18 | 0,41 | 0,59 | 0,74 | 0,83 | 1,10 | 1,28 | 1,44 | 1,74 | 1,84 | 1,01 |
| *z^2* | 0,03 | 0,16 | 0,35 | 0,55 | 0,69 | 1,21 | 1,64 | 2,06 | 3,03 | 3,39 | 1,31 |
| *zy* | 0,84 | 2,35 | 4,29 | 7,72 | 10,24 | 15,82 | 19,09 | 21,24 | 26,46 | 30,37 | 13,84 |
| *Yлин* | 7,48 | 8,11 | 8,74 | 9,37 | 9,79 | 11,26 | 12,52 | 13,79 | 16,94 | 18,20 | 11,62 |
| *Yкв* | 4,79 | 6,59 | 8,23 | 9,73 | 10,65 | 13,36 | 15,04 | 16,13 | 16,31 | 15,36 | 11,62 |
| *Yлог* | 5,56 | 7,18 | 8,51 | 9,63 | 10,30 | 12,23 | 13,56 | 14,68 | 16,91 | 17,63 | 11,62 |

Искомые векторы неизвестных параметров определим из систем линейных уравнений - , например методом Крамера или матричным методом, с использованием последнего столбца таблицы 3.3.

В результате получим уравнения регрессий:

1) ; линейной ;

2) ;

квадратичной ;

3) ;

логарифмической .

Построим графики всех полученных уравнений регрессии по точкам  (последние строки в таблице 3.3), как показано на рисунке 3.3

Рисунок 3.3 - Корреляционное поле и линии регрессий

**Пример 3.3**. Определите общую, объясненную и остаточную дисперсии для рассмотренных уравнений регрессий, а также коэффициенты детерминации.

*Решение.*

Вычислим общую, объясненную и остаточную дисперсии для рассмотренных уравнений регрессий с помощью MS Excel. Для этого составим следующую таблицу:

Таблица 3.4

| *i* | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | ср.знач |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *yi* | 4,6 | 5,8 | 7,3 | 10,4 | 12,30 | 14,4 | 14,9 | 14,8 | 15,2 | 16,5 | 11,62 |
| *Yлин=* | 7,48 | 8,11 | 8,74 | 9,37 | 9,79 | 11,26 | 12,52 | 13,79 | 16,94 | 18,20 | 11,62 |
| *Yкв=* | 4,79 | 6,59 | 8,23 | 9,73 | 10,65 | 13,36 | 15,04 | 16,13 | 16,31 | 15,36 | 11,62 |
| *Yлог=* | 5,56 | 7,18 | 8,51 | 9,63 | 10,30 | 12,23 | 13,56 | 14,68 | 16,91 | 17,63 | 11,62 |
|  | -7,02 | -5,82 | -4,32 | -1,22 | 0,68 | 2,78 | 3,28 | 3,18 | 3,58 | 4,88 | 0,00 |
|  | 49,280 | 33,872 | 18,662 | 1,488 | 0,462 | 7,728 | 10,758 | 10,112 | 12,816 | 23,814 | 16,90 |
|  | -4,14 | -3,51 | -2,88 | -2,25 | -1,83 | -0,36 | 0,90 | 2,17 | 5,32 | 6,58 | 0,00 |
|  | -6,83 | -5,03 | -3,39 | -1,89 | -0,97 | 1,74 | 3,42 | 4,51 | 4,69 | 3,74 | 0,00 |
|  | -6,06 | -4,44 | -3,11 | -1,99 | -1,32 | 0,61 | 1,94 | 3,06 | 5,29 | 6,01 | 0,00 |
|  | 17,17 | 12,34 | 8,30 | 5,06 | 3,35 | 0,13 | 0,82 | 4,69 | 28,32 | 43,34 | 12,35 |
|  | 46,58 | 25,32 | 11,46 | 3,55 | 0,93 | 3,02 | 11,68 | 20,38 | 22,00 | 13,95 | 15,89 |
|  | 36,73 | 19,68 | 9,66 | 3,94 | 1,75 | 0,37 | 3,76 | 9,38 | 27,94 | 36,17 | 14,94 |
|  | -2,88 | -2,31 | -1,44 | 1,03 | 2,51 | 3,14 | 2,38 | 1,01 | -1,74 | -1,70 | 0,00 |
|  | -0,19 | -0,79 | -0,93 | 0,67 | 1,65 | 1,04 | -0,14 | -1,33 | -1,11 | 1,14 | 0,00 |
|  | -0,96 | -1,38 | -1,21 | 0,77 | 2,00 | 2,17 | 1,34 | 0,12 | -1,71 | -1,13 | 0,00 |
|  | 8,27 | 5,32 | 2,07 | 1,06 | 6,30 | 9,84 | 5,64 | 1,03 | 3,03 | 2,90 | 4,55 |
|  | 0,04 | 0,62 | 0,87 | 0,44 | 2,71 | 1,09 | 0,02 | 1,78 | 1,23 | 1,31 | 1,01 |
|  | 0,92 | 1,92 | 1,47 | 0,59 | 4,01 | 4,70 | 1,80 | 0,01 | 2,91 | 1,29 | 1,96 |

Легко проверить выполнение правила сложения дисперсий :

; ;

.

Коэффициенты детерминации примут значения :

; ;

, где .

Максимальный коэффициент детерминации соответствует квадратичной регрессии, значит она и является наиболее удачной из рассмотренных.

# ПРОВЕРКА СТАТИСТИЧЕСКИХ ГИПОТЕЗ

Под *статистической гипотезой* понимается всякое высказывание о генеральной совокупности (случайной величине X), проверяемое по выборочной совокупности (по результатам наблюдений).

Для проверки гипотезы определяют специальную величину (статистику)  с известным законом распределения, как функцию выборочных данных . Величину  называют *статистическим критерием.* Полагая, что распределение признака *Х* подчинено гипотезе *Н0*, рассчитывают область возможных значений (с заданной вероятностью) статистики *К*. Эта *область принятия основной гипотезы*. *Критической называют область* практически невозможных (с вероятностью ) значений статистики *К,* если верна гипотеза *Н0*.

По имеющимся наблюдениям рассчитывают выборочное значение *К*. Если оно принадлежит критической области, то основную гипотезу отвергают.

Решение о том, можно ли считать гипотезу *Н0* верной для генеральной совокупности, принимается по выборочным данным, т.е. по ограниченному объему информации. Следовательно, это решение может быть ошибочным. При этом может иметь место ошибка двух родов (рисунок 4.1):

* *ошибка первого рода* совершается при отклонении верной гипотезы *Н0* . Вероятность такой ошибки называют *уровнем значимости критерия* 
* *ошибка второго рода* совершается при принятии неверной гипотезы *Н1*. Вероятность ошибки второго рода обозначим как .

Значение  - вероятность отвергнуть основную гипотезу когда она неверна, называют *мощностью критерия.*



Рисунок 4.1 - К проверке гипотез

Критическую область следует выбирать из условия обеспечения максимума мощности критерия при заданном уровне значимости. Критическая область может быть *левосторонней,* если она задается неравенством (), *двусторонней*  или *правосторонней* () (рис. 4.2).



Левосторонняя Двусторонняя Правосторонняя

Рисунок 4.2 - Критические области

## Проверка гипотез о числовых значениях

### Проверка гипотезы о равенстве математического ожидания нормального распределения заданному значению

*Проверка гипотезы о числовом значении МО* ***при известной дисперсии****.*

Предполагается, что , причем значение математического ожидания *а* неизвестно, а числовое значение дисперсии  известно.

По известной выборочной средней  необходимо проверить при уровне значимости  нулевую гипотезу  о том, что математическое ожидание генеральной совокупности ***а*** равно предполагаемому значению 

Если дисперсия генеральной совокупности известна (или неизвестна, но выборка достаточно большая ), то в качестве критерия *К* проверки нулевой гипотезы принимают *z-статистику* - нормально распределенную случайную величину с параметрами .

Вычислим наблюдаемое значение z-критерия:

.

Критическую точку  определим в зависимости от альтернативной гипотезы (типа критической области) с использованием функции Лапласа (Приложение 2).

Правило 1. При конкурирующей гипотезе , найдем критическую точку  двусторонней критической области из равенства

.

Если  нет оснований отвергнуть нулевую гипотезу. Если - нулевую гипотезу отвергают.

*Правило 2*. При конкурирующей гипотезе  критическую точку правосторонней критической области находят из равенства

.

Если  нет оснований отвергнуть нулевую гипотезу. Если - нулевую гипотезу отвергают.

*Правило 3*. При конкурирующей гипотезе  сначала находят вспомогательную критическую точку , как в пункте 2), а затем полагают границу левосторонней критической области .

Если - нет оснований отвергнуть нулевую гипотезу. Если  - нулевую гипотезу отвергают.

*Пример 574.*

Из нормальной генеральной совокупности с известным средним квадратическим отклонением  извлечена выборка объема  и по ней найдена выборочная средняя . Требуется при уровне значимости 0,05 проверить нулевую гипотезу  при конкурирующей гипотезе .

*Решение.* Найдем наблюдаемое значение критерия:

.

По условию, конкурирующая гипотеза имеет вид , поэтому критическая область — двусторонняя. Найдем критическую точку из равенства

.

По таблице функции Лапласа (см. приложение 2) находим .

Так как  — нулевую гипотезу отвергаем. Другими словами, математическое ожидание генеральной совокупности ***а*** значимо отличается от гипотетического значения .

***В табличном процессоре*** ***Excel*** для проверки рассмотренной выше гипотезы используется функция ZТЕСТ с обязательным указанием СКО. Обращение к ней имеет вид:

=ZТЕСТ(*массив*; ; []),

где *массив* – адреса ячеек, содержащих выборочные данные;

 и  – имеют прежний смысл, при этом, если параметр  опущен, то используется исправленная выборочная дисперсия *s*, вычисленная по той же выборке.

|  |  |
| --- | --- |
|  | Функция ZTEСT численно равна вероятности того, что ,  где  - гипотетическая случайная величина.  . |

*Проверка гипотезы о числовом значении МО* ***при неизвестной дисперсии****.*

Предполагается, что , значения математического ожидания *а* и дисперсии  неизвестны.

Если дисперсия генеральной совокупности неизвестна (например, в случае малых выборок), то в качестве критерия проверки нулевой гипотезы принимают *t-статистику* - случайную величину

*,*

которая имеет распределение Стьюдента с числом степеней свободы .

Для того чтобы при заданном уровне значимости  проверить нулевую гипотезу  о равенстве неизвестной генеральной средней ***а*** гипотетическому значению , вначале надо вычислить наблюдаемое значение критерия

.

Затем, в зависимости от конкурирующей гипотезы определить критическую точку указанного распределения и критерий принятия гипотезы.

***Правило 1.*** При конкурирующей гипотезе , по заданному уровню значимости , помещенному ***в верхней строке таблицы*** (прилож.5), и числу степеней свободы  найти критическую точку .

Если  — нет оснований отвергнуть нулевую гипотезу.

Если  — нулевую гипотезу отвергают.

***Правило 2.*** При конкурирующей гипотезе  по уровню значимости , помещенному ***в нижней строке таблицы*** (в 2 раза меньше) приложения 5, и числу степеней свободы  находят критическую точку  правосторонней критической области.

Если  — нет оснований отвергнуть нулевую гипотезу.

Если  — нулевую гипотезу отвергают.

***Правило 3.*** При конкурирующей гипотезе  сначала находят «вспомогательную» критическую точку (по правилу 2)  и полагают границу левосторонней критической области .

Если  — нет оснований отвергнуть нулевую гипотезу.

Если  — нулевую гипотезу отвергают.

***Примечание.***

Для проверки указанной гипотезы можно применять критерий Стьюдента (Приложение 3), использовавшийся для интервального оценивания.

В этом случае

*; *.

Поэтому определим вероятность  следующим образом:

для двусторонней критической области .

для односторонней критической области ;

1) Гипотеза  - критическая область двусторонняя .

При — нулевую гипотезу отвергают.

2) Гипотеза  - критическая область правосторонняя.

При — нулевую гипотезу отвергают.

3) Гипотеза  - критическая область левосторонняя.

При — нулевую гипотезу отвергают.

**Пример 4.1.** Хронометраж затрат времени на сборку узла машины *п =* 20 слесарей показал, что мин, а  мин2. В предположении о нормальности распределения решить вопрос: можно ли на уровне значимости  считать мин нормативом (математическим ожиданием) трудоемкости?

*Решение.* В качестве основной гипотезы принимается мин, в качестве альтернативной мин, т.е. имеем случай двусторонней критической области, при этом .

Используя таблицу Приложения 5, находим по верхней строчке  для  критическое значение . Таким образом, критерий отклонения нулевой гипотезы - принадлежность наблюдаемого значения критической области *.*

С использованием таблицы Приложения 3 получим тот же критерий отклонения нулевой гипотезы .

По формуле вычисляем .

Так как число –6,71 попадает в критическую область (конкретно в интервал , то гипотеза мин отвергается.

***В табличном процессоре*** ***Excel*** для проверки рассмотренной выше гипотезы используется уже известная функция ZТЕСТ без указания СКО. Обращение к ней имеет вид:

=ZТЕСТ(*массив*; ; []),

где *массив* – адреса ячеек, содержащих выборочные данные;

 и  – имеют прежний смысл, при этом, если параметр  опущен, то используется исправленная выборочная дисперсия *s*, вычисленная по той же выборке.

### Проверка гипотезы о числовом значении дисперсии нормального распределения

Полагаем, что . При этом по выборке объема *n* найдена исправленная дисперсия .

Необходимо при заданном уровне значимости  проверить нулевую гипотезу  о равенстве неизвестной генеральной дисперсии  гипотетическому (предполагаемому) значению .

В качестве критерия возьмем случайную величину

,

которая подчиняется -распределению с числом степеней свободы .

После вычисления наблюдаемого значения критерия определим его критические значения в зависимости от альтернативной гипотезы при заданном уровне значимости  и числу степеней свободы  (Прил. 4):

**Правило 1.** При конкурирующей гипотезе  критическая область правосторонняя с критической точкой .

Если  — нулевую гипотезу отвергают. В противном случае, если , — нет оснований отвергнуть нулевую гипотезу.

**Правило 2.** При конкурирующей гипотезе  критическая область двусторонняя. Находят левую  и правую  критические точки.

Если  или  — нулевую гипотезу отвергают. Если  — нет оснований отвергнуть нулевую гипотезу.

**Правило 3.** При конкурирующей гипотезе  критическая область левосторонняя. с критической точкой .

Если  — нулевую гипотезу отвергают. Если  — нет оснований отвергнуть нулевую гипотезу.

**З а м е ч а н и е .** Если число степеней свободы *k > 30*, то критическую точку  можно найти из равенства Уилсона—Гильферти [4]:

,

где  находят, используя функцию Лапласа, из равенства

.

***Пример 560.***

Из нормальной генеральной совокупности извлечена выборка объема  и по ней найдена исправленная выборочная дисперсия . Требуется при уровне значимости 0,01 проверить нулевую гипотезу , приняв в качестве конкурирующей гипотезы .

*Решение.* Найдем наблюдаемое значение критерия:

.

По условию, конкурирующая гипотеза имеет вид , поэтому критическая область — правосторонняя (правило 1). По таблице приложения 4, по уровню значимости 0,01 и числу степеней свободы  находим критическую точку 

Так как  — нет оснований отвергнуть нулевую гипотезу о равенстве генеральной дисперсии гипотетическому значению . Другими словами, различие между исправленной дисперсией и гипотетической генеральной дисперсией незначимо.

***Пример 565.***

Партия изделий принимается, если дисперсия контролируемого размера значимо не превышает 0,2. Исправленная выборочная дисперсия, найденная по выборке объема , оказалась равной . Можно ли принять партию при уровне значимости 0,01?

*Решение.* Нулевая гипотеза . Найдем наблюдаемое значение критерия:

.

Конкурирующая гипотеза имеет вид , следовательно, критическая область правосторонняя. Поскольку в таблице приложения 4 не содержится числа степеней свободы , найдем критическую точку приближенно из равенства Уилсона — Гильферти :

.

Найдем предварительно (учитывая, что по условию )  из равенства

.

По таблице функции Лапласа (см. приложение 2), используя линейную интерполяцию, находим: . Подставив  в формулу Уилсона — Гильферти, получим . (Это приближение достаточно хорошее: в более полных таблицах  приведено значение 158,95). Так как  — нулевую гипотезу отвергаем. Партию принять нельзя.

### Проверка гипотезы о числовом значении вероятности события

Пусть по достаточно большому числу *n* независимых испытаний, в каждом из которых вероятность *р* появления события постоянна, но неизвестна, найдена относительная частота *m*/*n*. Требуется при заданном уровне значимости  проверить нулевую гипотезу  о равенстве неизвестной вероятности *р* некоторому гипотетическому значению .

В качестве критерия возьмем величину

*,*

значение которой подчиняется стандартному нормальному распределению.

Критическое значение критерия  определим в зависимости от альтернативной гипотезы (типа критической области) с использованием функции Лапласа (Приложение 2) по формулам , для МО.

**Замечание.** Удовлетворительные результаты обеспечивает выполнение неравенства .

***Пример 586***. По 100 независимым испытаниям найдена относительна частота . При уровне значимости 0,05 требуется проверить нулевую гипотезу  при конкурирующей гипотезе 

*Решение.*

Найдем наблюдаемое значение критерия, учитывая, что :

*.*

По условию, конкурирующая гипотеза имеет вид , поэтому критическая область — двусторонняя. Найдем критическую точку  по равенству

******.

По таблице функции Лапласа (см. приложение 2) находим .

Так как — нет оснований отвергнуть нулевую гипотезу. Другими словами, наблюдаемая относительная частота 0,14 незначимо отличается от гипотетической вероятности 0,20.

### Проверка гипотезы о значимости выборочного коэффициента корреляции

Пусть двумерная генеральная совокупность (X, Y) распределена нормально. Из этой совокупности извлечена выборка объема *n* и по ней найден выборочный коэффициент корреляции . Требуется проверить нулевую гипотезу  о равенстве нулю генерального коэффициента корреляции.

Если нулевая гипотеза принимается, то это означает, что X и Y некоррелированы; в противном случае — коррелированы.

Для того чтобы при уровне значимости  проверить нулевую гипотезу о равенстве нулю генерального коэффициента корреляции нормальной двумерной случайной величины при конкурирующей гипотезе , надо вычислить наблюдаемое значение критерия



и по таблице критических точек распределения Стьюдента, по заданному уровню значимости  и числу степеней свободы  найти критическую точку  двусторонней критической области. Если  - нет оснований отвергнуть нулевую гипотезу. Если  - нулевую гипотезу отвергают.

***Пример 610.***

По выборке объема *n=100*, извлеченной из двумерной нормальной генеральной совокупности (X, Y), найден выборочный коэффициент корреляции . Требуется при уровне значимости 0,05 проверить нулевую гипотезу  о равенстве нулю генерального коэффициента корреляции при конкурирующей гипотезе .

*Решение.*

Найдем наблюдаемое значение критерия

.

По условию, конкурирующая гипотеза , поэтому критическая область - двусторонняя.

По таблице критических точек *t-*распределения Стьюдента (прил.5), по уровню значимости  в верхней части таблицы и числу степеней свободы *k=100-2=98* методом линейной интерполяции находим критическую точку двусторонней критической области .

Поскольку , то нулевую гипотезу отвергаем. Генеральный коэффициент корреляции значимо отличается от нуля, а генеральные совокупности (X, Y) коррелированы.

### ЗАДАЧИ

ЗАДАЧА 575. а) Из нормальной генеральной совокупности с известным средним квадратическим отклонением  извлечена выборка объема  и по ней найдена выборочная средняя. Требуется при уровне значимости 0,01 проверить нулевую гипотезу :  при конкурирующей гипотезе : 

б) Решить эту задачу при конкурирующей гипотез : 

в) Установлено, что средний вес таблетки лекарства сильного действия должен быть равен  мг. Выборочная проверка 121 таблетки полученной партии лекарства показала, что средний вес таблетки этой партии мг. Требуется при уровне значимости 0,01 проверить нулевую гипотезу : при конкурирующей гипотезе :. Многократными предварительными опытами по взвешиванию таблеток, поставляемых фармацевтическим заводом, было установлено, что вес таблеток распределен нормально со средним квадратическим отклонением  мг.

ЗАДАЧА 579. а) По выборке объема *n=16*, извлеченной из нормальной генеральной совокупности, найдены выборочная средняя  и «исправленное» среднее квадратическое отклонение *s=3,6*. Требуется при уровне значимости 0,05 проверить нулевую гипотезу  при конкурирующей гипотезе .

а) Решить эту задачу, приняв в качестве конкурирующей гипотезы .

ЗАДАЧА561.Из нормальной генеральной совокупности извлечена выборка объема *n=17* и по ней найдена исправленная выборочная дисперсия . Требуется при уровне значимости 0,05 проверить нулевую гипотезу , приняв в качестве конкурирующей гипотезы .

ЗАДАЧА 566. Партия изделий принимается, если дисперсия контролируемого размера значимо не превышает 0,2. Исправленная выборочная дисперсия, найденная по выборке объема , оказалась равной . Можно ли принять партию при уровне значимости 0,05?

ЗАДАЧА 589. Партия изделий принимается, если вероятность того, что изделие окажется бракованным, не превышает 0,03. Среди случайно отобранных 400 изделий оказалось 18 бракованных. Можно ли принять партию?

*Указание.* Принять нулевую гипотезу  а в качестве конкурирующей ; уровень значимости .

ЗАДАЧА 590. Завод рассылает рекламные каталоги возможным заказчикам. Как показал опыт, вероятность того, что организация, получившая каталог, закажет, рекламируемое изделие, равна 0,08. Завод разослал 1000 каталогов новой улучшенной формы и получил 100 заказов. Можно ли считать, что новая форма рекламы оказалась значимо эффективнее первой?

*У к а з а н и е. Принять нулевую гипотезу , а в качестве конкурирующей ; уровень значимости .*

ЗАДАЧА 591. В результате длительных наблюдений установлено, что вероятность полного выздоровления больного, принимавшего лекарство *А*, равна 0,8. Новое лекарство *В* назначено 800 больным, причем 660 из них полностью выздоровели. Можно ли считать новое лекарство значимо эффективнее лекарства *А* на пятипроцентном уровне значимости?

*У к а з а н и е . Принять ; .*

ЗАДАЧА 611. По выборке объема , извлеченной из нормальной двумерной генеральной совокупности (X, Y), найден выборочный коэффициент корреляции . Требуется при уровне значимости 0,01 проверить нулевую гипотезу  о равенстве нулю генерального коэффициента корреляции при конкурирующей гипотезе .

ЗАДАЧА 612. По выборке объема , извлеченной из нормальной двумерной генеральной совокупности (X, Y), найден выборочный коэффициент корреляции . Требуется при уровне значимости 0,05 проверить нулевую гипотезу  о равенстве нулю генерального коэффициента корреляции при конкурирующей гипотезе .

## Проверка гипотез о равенстве числовых характеристик

### Проверка гипотезы о равенстве дисперсий двух нормальных распределений

Пусть *Х* и *Y –* две случайные величины, имеющие нормальные распределения и неизвестные дисперсии  и . Пусть найдены исправленные выборочные дисперсии  и , по которым требуется сравнить эти дисперсии, т.е. проверить при заданном уровне значимости нулевую гипотезу

.

Имеют место следующие распределения:

; .

Поэтому в соответствии с определением *F*-распределения отношение  или отношение  будет иметь распределение Фишера с  и  степенями свободы, т.е.

.

Если гипотеза верна, то из непосредственно получаем критерий Фишера-Снедекора (отношение большей исправленной дисперсии к меньшей)



где  и  - число степеней свободы большей и меньшей дисперсий соответственно.

**Правило 1.** Для определения  при конкурирующей гипотезе  надо по таблице критических точек распределения Фишера-Снедекора (Приложение 6) по заданному уровню значимости  и степеням свободы  и  ( - для большей дисперсии) отыскать критическую точку . Если , то нулевую гипотезу отвергают.

**Правило 2.** При конкурирующей гипотезе  критическую точку  ищут по уровню значимости  (вдвое меньшему заданного) и числам степеней свободы  и  (—число степеней свободы большей дисперсии). Если — нет оснований отвергнуть нулевую гипотезу. Если — нулевую гипотезу отвергают.

**Пример 554.** По двум независимым выборкам, объемы которых  и , извлеченным из нормальных генеральных совокупностей X и Y, найдены исправленные выборочные дисперсии  и . При уровне значимости 0,05, проверить нулевую гипотезу о равенстве генеральных дисперсий, при конкурирующей гипотезе .

*Решение.* Найдем отношение большей исправленной дисперсии к меньшей:

.

По условию конкурирующая гипотеза имеет вид , поэтому критическая область — правосторонняя.

По таблице приложения 6, по уровню значимости 0,05 и числам степеней свободы  и  находим критическую точку

.

Так как  — нет оснований отвергнуть гипотезу о равенстве генеральных дисперсий. Другими словами, выборочные исправленные дисперсии различаются незначимо.

Для проверки данной гипотезы ***в Excel*** в качестве границ критической области выступают квантили распределения Фишера. Для вычисления этих квантилей используется функция FРАСПОБР, обращение к которой имеет вид:

*=FРАСПОБР(вероятность;степени\_свободы1;степени\_свободы2)*

где вероятность – уровень значимости  при построении правосторонней критической области.

Граница правосторонней критической области вычисляется с помощью выражения

.

Граница при построении двухсторонней критической области вычисляется с помощью выражения

.

Проверить гипотезу о равенстве дисперсий двух случайных величин ,  можно с использованием режима ***Двухвыборочный F-тест для дисперсии***. Для вызова режима необходимо обратиться к соответствующему пункту *Пакета анализа*.

### Проверка гипотезы о равенстве математических ожиданий нормальных распределений

*Сравнение двух средних генеральных совокупностей* ***при известных дисперсиях*** *(большие независимые выборки).*

Обозначим через *n* и *m* объемы больших (*n>30, m>30*) независимых выборок, по которым найдены соответствующие выборочные средние  и . Генеральные дисперсии *D(X)* и *D(Y)* известны.

Гипотеза  о равенстве МО генеральных совокупностей.

Доказывается, что случайная величина

,

при выполнении гипотезы  подчиняется нормальному распределению , поэтому возьмем ее в качестве критерия.

Критическое значение критерия  определим в зависимости от альтернативной гипотезы (типа критической области) с использованием функции Лапласа (Приложение 2) по формулам , для МО.

Для проверки этой гипотезы ***с использованием Excel*** используется режим работы ***Двухвыборочный z-тест для средних***. Для вызова этого режима необходимо обратиться к меню ***Данные***, команде *Пакет анализа*.

***Сравнение двух средних генеральных совокупностей при неизвестных, но одинаковых дисперсиях (малые независимые выборки).***

Обозначим через *n* и *m* объемы малых (*n<30, m<30*) независимых выборок, по которым найдены соответствующие выборочные средние  и  и исправленные выборочные дисперсии . Генеральные дисперсии *D(X)* и *D(Y)* *не известны, но предполагаются одинаковыми (предварительно проверить равенство дисперсий по критерию Фишера-Снедокора).*

Гипотеза  о равенстве МО генеральных совокупностей.

Доказывается, что случайная величина

*, *

при выполнении гипотезы  подчиняется *t-*распределению Стьюдента с  степенями свободы, которую и возьмем в качестве критерия.

Ранее уже рассматривался критерий , имеющий распределение Стьюдента с  степенями свободы. Никаких принципиальных различий в алгоритмы построения критических областей не вносится.

Критическое значение критерия  определим в зависимости от альтернативной гипотезы (типа критической области) с использованием распределения Стьюдента с  степенями свободы по таблице Приложения 5. Возможно использование Приложения 3. При этом, если

1) Гипотеза  - критическая область двусторонняя.

2) Гипотеза  - критическая область правосторонняя.

3) Гипотеза  - критическая область левосторонняя.

Для проверки этой гипотезы в ***Excel*** используется режим ***Двухвыборочный t-тест с одинаковыми дисперсиями*** *Пакета анализа* или функция

=ТТЕСТ(массив1;массив2;хвосты;тип).

***Пример 570.*** По двум независимым малым выборкам, объемы которых  и , извлеченным из нормальных генеральных совокупностей  и , найдены выборочные средние ,  и исправленные дисперсии:  и . Требуется при уровне значимости 0,05 проверить нулевую гипотезу  при конкурирующей гипотезе .

*Решение.*Исправленные дисперсии различны, поэтому проверим предварительно гипотезу о равенстве генеральных дисперсий, используя критерий Фишера-Снедекора.

Найдем отношение большей дисперсии к меньшей: . Дисперсия  значительно больше дисперсии , поэтому в качестве конкурирующей примем гипотезу .

В этом случае критическая область — правосторонняя. По таблице приложения 6, по уровню значимости  и числам степеней свободы  и  находим критическую точку .

Так как  оснований отвергнуть нулевую гипотезу о равенстве генеральных дисперсий.

Предположение о равенстве генеральных дисперсий выполняется, поэтому сравним средние. Вычислим наблюдаемое значение критерия Стьюдента . Подставив числовые значения входящих в эту формулу величин, получим .

По условию, конкурирующая гипотеза имеет вид , поэтому критическая область — двусторонняя. По уровню значимости 0,05 и числу степеней свободы  находим по таблице приложения 5 критическую точку .

Так как  — нулевую гипотезу о равенстве средних отвергаем. Другими словами, выборочные средние различаются значимо.

### ЗАДАЧИ

ЗАДАЧА 555. По двум независимым выборкам, объемы которых  и, извлеченным из нормальных генеральных совокупностей X и Y, найдены исправленные выборочные дисперсии  и. При уровне значимости 0,01, проверить нулевую гипотезу :  o равенстве генеральных дисперсий при конкурирующей гипотезе : 

ЗАДАЧА 567. По двум независимым выборкам, объемы которых *n=40* и *m=50*, извлеченным из нормальных генеральных совокупностей, найдены выборочные средние:  и . Генеральные дисперсии известны: *D(X)=80, D(Y)=100*. Требуется при уровне значимости 0,01 проверить нулевую гипотезу  при конкурирующей гипотезе .

ЗАДАЧА 571. По двум независимым малым выборкам, объемы которых *n=10* и *m=8*, извлеченным из нормальных генеральных совокупностей X и Y, найдены выборочные средние: ,  и исправленные дисперсии:  и . Требуется при уровне значимости 0,01 проверить нулевую гипотезу  при конкурирующей гипотезе .

*(предварительно проверить равенство дисперсий по критерию Фишера-Снедокора).*

# ВАРИАНТЫ ИНДИВИДУАЛЬНЫХ ЗАДАНИЙ

1. **Первичная обработка информации. Оценки параметров.** 
   1. -му варианту соответствуют только элементы выборки "х" соответствующей строки (объем выборки при этом .
   2. Построить интервальный вариационный ряд; гистограмму относительных частот; эмпирическую функцию распределения.
   3. Определить выборочное среднее, выборочную и исправленную дисперсии, СКО, моду, медиану, вариационный размах и коэффициент вариации.
   4. Полагая закон распределения вариант нормальным, найти интервальную оценку математического ожидания с надежностью  (см. таблицу).
   5. Найти минимальный объем выборки, обеспечивающий с надежностью  точность  оценки математического ожидания.
   6. Найти интервальные оценки дисперсии и СКО генеральной совокупности с надежностью (см. таблицу).
2. **Регрессионный анализ и проверка гипотез.** 
   1. -му варианту соответствуют выборки случайных величин X и Y, расположенные в соответствующих строках.
   2. По данным выборки определить:

* оценку вектора математического ожидания;
* оценку вектора выборочной дисперсии;
* выборочную ковариацию;
* выборочный коэффициент корреляции;
* выборочные коэффициенты линейных регрессий Y на X и X на Y;
* выборочные уравнения линейных регрессий Y на X и X на Y.
  1. Используя метод наименьших квадратов, найти параметры линейной, квадратичной и логарифмической регрессий.
  2. Определите общую, объясненную и остаточную дисперсии для рассмотренных уравнений регрессий, а также коэффициенты детерминации.
  3. Построить поле корреляции и найденные линии регрессии.
  4. Полагая в дальнейшем, что наблюдаемые признаки X и Y распределены по нормальному закону, проверить гипотезы о равенстве их математических ожиданий гипотетическим значениям  с уровнями значимости  при альтернативе  (см. таблицу).
  5. Проверить гипотезы о равенстве генеральных дисперсий гипотетическим значениям  с уровнями значимости  при альтернативе  (см. таблицу).
  6. Проверить гипотезу  о равенстве генеральных дисперсий признаков X и Y по их выборкам при конкурирующей гипотезе об их неравенстве при уровне значимости  (см. таблицу).
  7. Проверить гипотезу о значимости выборочного коэффициента корреляции при уровне значимости .

| Вариант | | Номер измерения | | | | | | | | | | | | | | | | Интервал. оц. | | | Проверка гипотез | | | | |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 |  |  |  |  | зн |  |  |  |
| 1 | x | 2,3 | 2,1 | 4,6 | 4,9 | 3,7 | 5 | 2,8 | 1,6 | 4,8 | 3,7 | 1,1 | 2,4 | 4,3 | 4,5 | 3,2 | 2,4 | *0,95* | *0,16* | *0,95* | *0,05* | < | *4,8* | *0,75* |  |
| 1 | y | -1,9 | -0,2 | 0,0 | 1,6 | 0,6 | -0,9 | 0,0 | -2,4 | 0,4 | 3,2 | -4,6 | -1,9 | 3,0 | 2,6 | 2,8 | 1,0 |  |  |  | *0,02* | > | *-0,3* | *7,35* | *0,05* |
| 2 | x | 1,3 | 1,1 | 3,6 | 3,9 | 2,7 | 4 | 1,8 | 0,6 | 3,8 | 2,7 | 0,1 | 1,4 | 3,3 | 3,5 | 2,2 | 1,4 | *0,99* | *0,21* | *0,98* | *0,02* | >< | *3,3* | *0,75* |  |
| 2 | y | 1,1 | 2,8 | 0,9 | -1,2 | 2,9 | 0,7 | 2,0 | 1,4 | -1,1 | 1,0 | -1,5 | -0,2 | 0,7 | -1,6 | 0,2 | 0,5 |  |  |  | *0,05* | < | *1,35* | *2,48* | *0,01* |
| 3 | x | 2,3 | 2,1 | 4,6 | 4,9 | 3,7 | 5 | 2,8 | 1,6 | 4,8 | 3,7 | 1,1 | 2,4 | 4,3 | 4,5 | 3,2 | 2,4 | *0,98* | *0,19* | *0,95* | *0,05* | < | *4,8* | *0,75* |  |
| 3 | y | -0,6 | -1,1 | 0,6 | 1,7 | 3,4 | 1,6 | -0,6 | -1,8 | 0,6 | 2,1 | -4,6 | 1,0 | 0,6 | -0,1 | 1,8 | -0,2 |  |  |  | *0,02* | >< | *0,15* | *4,43* | *0,05* |
| 4 | x | 1,3 | 1,1 | 3,6 | 3,9 | 2,7 | 4 | 1,8 | 0,6 | 3,8 | 2,7 | 0,1 | 1,4 | 3,3 | 3,5 | 2,2 | 1,4 | *0,95* | *0,16* | *0,98* | *0,05* | < | *3,3* | *0,75* |  |
| 4 | y | -1,3 | 0,3 | -3,1 | -1,8 | -0,2 | -3,9 | 0,4 | -2,8 | -2,1 | -0,5 | -2,4 | 1,7 | 0,8 | -3,0 | 1,0 | 1,5 |  |  |  | *0,1* | >< | *-1,05* | *2,22* | *0,01* |
| 5 | x | 2,3 | 2,1 | 4,6 | 4,9 | 3,7 | 5 | 2,8 | 1,6 | 4,8 | 3,7 | 1,1 | 2,4 | 4,3 | 4,5 | 3,2 | 2,4 | *0,99* | *0,21* | *0,95* | *0,05* | < | *4,8* | *0,75* |  |
| 5 | y | -1,4 | -0,5 | 1,2 | 1,5 | 2,1 | 0,6 | 1,8 | -4,1 | 2,1 | 2,8 | -6,6 | 0,4 | -1,0 | 2,4 | 1,9 | -0,4 |  |  |  | *0,02* | >< | *-1,05* | *6,89* | *0,05* |
| 6 | x | 2,3 | 2,1 | 4,6 | 4,9 | 3,7 | 5 | 2,8 | 1,6 | 4,8 | 3,7 | 1,1 | 2,4 | 4,3 | 4,5 | 3,2 | 2,4 | *0,98* | *0,19* | *0,98* | *0,02* | < | *4,8* | *0,75* |  |
| 6 | y | 0,5 | 0,0 | -1,1 | 0,2 | -0,9 | -2,1 | 0,8 | 4,1 | -2,9 | -3,6 | 8,3 | 1,6 | -0,6 | -2,5 | -0,8 | -1,2 |  |  |  | *0,1* | >< | *0,45* | *12,63* | *0,01* |
| 7 | x | 1,3 | 1,1 | 3,6 | 3,9 | 2,7 | 4 | 1,8 | 0,6 | 3,8 | 2,7 | 0,1 | 1,4 | 3,3 | 3,5 | 2,2 | 1,4 | *0,95* | *0,16* | *0,95* | *0,05* | < | *3,3* | *0,75* |  |
| 7 | y | -2,0 | 0,3 | 1,4 | 0,7 | -0,9 | 1,4 | -1,0 | -1,6 | 0,0 | -3,3 | 1,2 | -3,0 | 0,8 | -0,1 | 0,0 | -3,2 |  |  |  | *0,02* | >< | *-1,5* | *2,07* | *0,05* |
| 8 | x | 2,3 | 2,1 | 4,6 | 4,9 | 3,7 | 5 | 2,8 | 1,6 | 4,8 | 3,7 | 1,1 | 2,4 | 4,3 | 4,5 | 3,2 | 2,4 | *0,99* | *0,21* | *0,98* | *0,05* | >< | *4,8* | *0,75* |  |
| 8 | y | 1,5 | -1,1 | -0,9 | -0,6 | -2,0 | -3,1 | -1,8 | 1,9 | -3,5 | -2,5 | 4,2 | -0,5 | -0,6 | -2,5 | -2,5 | -2,3 |  |  |  | *0,02* | >< | *-1,2* | *4,51* | *0,01* |
| 9 | x | 1,3 | 1,1 | 3,6 | 3,9 | 2,7 | 4 | 1,8 | 0,6 | 3,8 | 2,7 | 0,1 | 1,4 | 3,3 | 3,5 | 2,2 | 1,4 | *0,98* | *0,19* | *0,95* | *0,05* | < | *3,3* | *0,75* |  |
| 9 | y | -0,8 | 1,7 | 1,4 | 4,4 | 0,4 | 4,4 | -0,1 | 1,1 | 1,8 | 0,2 | 1,2 | 0,2 | 0,7 | 2,7 | 0,3 | 0,7 |  |  |  | *0,02* | >< | *1,35* | *2,48* | *0,05* |
| 10 | x | 2,3 | 2,1 | 4,6 | 4,9 | 3,7 | 5 | 2,8 | 1,6 | 4,8 | 3,7 | 1,1 | 2,4 | 4,3 | 4,5 | 3,2 | 2,4 | *0,95* | *0,16* | *0,98* | *0,02* | < | *4,8* | *0,75* |  |
| 10 | y | -0,5 | 2,7 | 1,1 | -1,9 | -1,7 | -0,7 | -0,9 | 2,4 | -1,8 | 0,4 | 7,2 | -0,9 | -0,2 | 0,9 | 1,0 | 0,5 |  |  |  | *0,05* | < | *2,1* | *9,93* | *0,01* |
| 11 | x | 17,2 | 23,2 | 29,5 | 29,1 | 17,2 | 30,6 | 7,2 | 6,1 | 29,3 | 25,6 | 6,5 | 9,1 | 31,4 | 24,3 | 32 | 16,4 | *0,95* | *0,16* | *0,975* | *0,05* | < | *25,05* | *44,72* |  |
| 11 | y | -8,4 | -9,9 | -12,7 | -10,3 | -9,7 | -12,9 | -1,4 | -0,4 | -10,9 | -12,9 | 0,6 | -5,2 | -14,0 | -10,2 | -13,0 | -9,3 |  |  |  | *0,02* | >< | *-11,85* | *11,80* | *0,05* |
| 12 | x | 16,2 | 22,2 | 28,5 | 28,1 | 16,2 | 29,6 | 6,2 | 5,1 | 28,3 | 24,6 | 5,5 | 8,1 | 30,4 | 23,3 | 31 | 15,4 | *0,99* | *0,21* | *0,99* | *0,05* | >< | *23,55* | *44,72* |  |
| 12 | y | -1,8 | -1,3 | -4,3 | -4,9 | 0,1 | -5,9 | 3,5 | 4,5 | -3,9 | -2,6 | 4,4 | 2,5 | -5,8 | -5,1 | -5,0 | 0,8 |  |  |  | *0,02* | >< | *0,15* | *9,09* | *0,01* |
| 13 | x | 17,2 | 23,2 | 29,5 | 29,1 | 17,2 | 30,6 | 7,2 | 6,1 | 29,3 | 25,6 | 6,5 | 9,1 | 31,4 | 24,3 | 32 | 16,4 | *0,98* | *0,19* | *0,975* | *0,05* | < | *25,05* | *44,72* |  |
| 13 | y | 0,0 | -2,4 | -2,1 | -2,9 | 0,4 | -4,9 | 7,0 | 7,4 | -3,9 | -1,4 | 5,8 | 2,7 | -1,4 | -3,0 | -3,4 | 1,8 |  |  |  | *0,02* | >< | *1,5* | *5,42* | *0,05* |
| 14 | x | 16,2 | 22,2 | 28,5 | 28,1 | 16,2 | 29,6 | 6,2 | 5,1 | 28,3 | 24,6 | 5,5 | 8,1 | 30,4 | 23,3 | 31 | 15,4 | *0,95* | *0,16* | *0,99* | *0,02* | < | *23,55* | *44,72* |  |
| 14 | y | -1,5 | 0,1 | -0,3 | -0,7 | -0,7 | -3,5 | 2,8 | 5,6 | -3,0 | -2,5 | 4,7 | 3,0 | -3,7 | 0,2 | -1,8 | -0,2 |  |  |  | *0,05* | < | *1,2* | *3,06* | *0,01* |
| 15 | x | 17,2 | 23,2 | 29,5 | 29,1 | 17,2 | 30,6 | 7,2 | 6,1 | 29,3 | 25,6 | 6,5 | 9,1 | 31,4 | 24,3 | 32 | 16,4 | *0,99* | *0,21* | *0,975* | *0,05* | >< | *25,05* | *44,72* |  |
| 15 | y | -0,5 | -0,1 | -4,0 | -1,6 | -0,9 | -3,9 | 1,6 | 4,5 | -1,0 | -0,7 | 3,1 | 4,0 | -2,7 | -2,2 | -1,3 | -1,3 |  |  |  | *0,02* | >< | *0* | *5,33* | *0,05* |
| 16 | x | 17,2 | 23,2 | 29,5 | 29,1 | 17,2 | 30,6 | 7,2 | 6,1 | 29,3 | 25,6 | 6,5 | 9,1 | 31,4 | 24,3 | 32 | 16,4 | *0,98* | *0,19* | *0,99* | *0,01* | < | *25,05* | *44,72* |  |
| 16 | y | 10,9 | 9,8 | 11,4 | 10,2 | 8,7 | 12,4 | 0,2 | -1,2 | 13,9 | 12,7 | 0,6 | 4,6 | 12,9 | 9,7 | 13,1 | 8,1 |  |  |  | *0,1* | >< | *11,1* | *8,28* | *0,01* |
| 17 | x | 16,2 | 22,2 | 28,5 | 28,1 | 16,2 | 29,6 | 6,2 | 5,1 | 28,3 | 24,6 | 5,5 | 8,1 | 30,4 | 23,3 | 31 | 15,4 | *0,95* | *0,16* | *0,975* | *0,05* | < | *23,55* | *44,72* |  |
| 17 | y | 0,4 | 3,0 | 2,8 | 5,4 | -0,2 | 4,6 | -3,7 | -7,7 | 6,2 | 4,3 | -6,3 | -4,0 | 4,1 | 3,9 | 3,1 | 2,6 |  |  |  | *0,02* | >< | *0,75* | *8,83* | *0,05* |
| 18 | x | 17,2 | 23,2 | 29,5 | 29,1 | 17,2 | 30,6 | 7,2 | 6,1 | 29,3 | 25,6 | 6,5 | 9,1 | 31,4 | 24,3 | 32 | 16,4 | *0,99* | *0,21* | *0,99* | *0,02* | >< | *25,05* | *44,72* |  |
| 18 | y | -0,3 | 2,1 | 4,0 | 3,6 | -0,6 | 2,5 | -4,9 | -8,7 | 2,6 | 4,0 | -7,7 | -3,4 | 3,0 | 0,4 | 4,3 | -1,4 |  |  |  | *0,05* | > | *-0,6* | *5,44* | *0,01* |
| 19 | x | 16,2 | 22,2 | 28,5 | 28,1 | 16,2 | 29,6 | 6,2 | 5,1 | 28,3 | 24,6 | 5,5 | 8,1 | 30,4 | 23,3 | 31 | 15,4 | *0,98* | *0,19* | *0,975* | *0,05* | < | *23,55* | *44,72* |  |
| 19 | y | 1,1 | 2,9 | 0,3 | 0,1 | -0,7 | 0,1 | -3,1 | -4,4 | 1,5 | 2,5 | -2,7 | -0,8 | 3,8 | 2,9 | 2,6 | -1,5 |  |  |  | *0,02* | >< | *-1,2* | *6,03* | *0,05* |
| 20 | x | 17,2 | 23,2 | 29,5 | 29,1 | 17,2 | 30,6 | 7,2 | 6,1 | 29,3 | 25,6 | 6,5 | 9,1 | 31,4 | 24,3 | 32 | 16,4 | *0,95* | *0,16* | *0,99* | *0,02* | < | *25,05* | *44,72* |  |
| 20 | y | 2,6 | 2,7 | 0,9 | 1,2 | 0,5 | 4,6 | -2,9 | -3,3 | 2,7 | 3,2 | -3,3 | -3,5 | 1,7 | 1,8 | 3,6 | -1,2 |  |  |  | *0,05* | > | *0,15* | *5,01* | *0,01* |
| 21 | x | 3 | 5 | 3,2 | 1,4 | 3,4 | 4,1 | 2,3 | 4,1 | 4,9 | 3,8 | 4,8 | 2,4 | 1,8 | 1,1 | 2,6 | 4,3 | *0,99* | *0,21* | *0,975* | *0,05* | >< | *4,8* | *0,75* |  |
| 21 | y | 2,5 | 2,8 | 0,0 | -3,6 | 0,0 | 3,1 | 0,0 | 2,2 | -0,3 | 3,4 | 0,9 | 0,7 | -4,8 | -7,3 | 0,4 | 2,8 |  |  |  | *0,02* | < | *1,05* | *13,31* | *0,05* |
| 22 | x | 2 | 4 | 2,2 | 0,4 | 2,4 | 3,1 | 1,3 | 3,1 | 3,9 | 2,8 | 3,8 | 1,4 | 0,8 | 0,1 | 1,6 | 3,3 | *0,98* | *0,19* | *0,99* | *0,02* | < | *3,3* | *0,75* |  |
| 22 | y | 3,4 | -1,9 | 1,8 | -0,7 | 1,7 | 0,8 | 2,0 | 1,0 | -2,7 | 1,2 | -0,2 | 3,3 | 2,1 | -2,6 | 3,1 | -1,2 |  |  |  | *0,1* | >< | *1,2* | *2,93* | *0,01* |
| 23 | x | 3 | 5 | 3,2 | 1,4 | 3,4 | 4,1 | 2,3 | 4,1 | 4,9 | 3,8 | 4,8 | 2,4 | 1,8 | 1,1 | 2,6 | 4,3 | *0,95* | *0,16* | *0,975* | *0,05* | < | *4,8* | *0,75* |  |
| 23 | y | 0,4 | -0,3 | 3,5 | -1,1 | 3,6 | 0,9 | -1,6 | 2,8 | 0,5 | 1,5 | 2,1 | -0,3 | -1,1 | -1,0 | 2,3 | 1,5 |  |  |  | *0,02* | >< | *1,35* | *5,20* | *0,05* |
| 24 | x | 2 | 4 | 2,2 | 0,4 | 2,4 | 3,1 | 1,3 | 3,1 | 3,9 | 2,8 | 3,8 | 1,4 | 0,8 | 0,1 | 1,6 | 3,3 | *0,99* | *0,21* | *0,99* | *0,01* | >< | *3,3* | *0,75* |  |
| 24 | y | 1,4 | -3,9 | -0,2 | -2,4 | 2,0 | -1,1 | 2,2 | -1,5 | -2,8 | -0,3 | -0,6 | -0,8 | -0,2 | -4,0 | -0,7 | 0,7 |  |  |  | *0,05* | >< | *-0,6* | *3,12* | *0,01* |
| 25 | x | 3 | 5 | 3,2 | 1,4 | 3,4 | 4,1 | 2,3 | 4,1 | 4,9 | 3,8 | 4,8 | 2,4 | 1,8 | 1,1 | 2,6 | 4,3 | *0,98* | *0,19* | *0,975* | *0,05* | < | *4,8* | *0,75* |  |
| 25 | y | -1,6 | 1,5 | 2,1 | -5,8 | -0,4 | 0,6 | -1,4 | 1,4 | -1,0 | -0,5 | 2,3 | 0,2 | -2,3 | -4,2 | -1,1 | -0,5 |  |  |  | *0,02* | >< | *-0,9* | *6,97* | *0,05* |

# 

# ПРИЛОЖЕНИЕ 1 - Нормированная функция Гаусса

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | | | | |  | | | | | | |
|  | | | | |
| *=НОРМРАСП(x;среднее;стандартное\_откл;интегральная)* | | | | | | | | | | | |
|  | **0** | **1** | **2** | **3** | | **4** | **5** | **6** | **7** | **8** | **9** | |  |
| **0,0** | **0,3989** | 3989 | 3989 | 3988 | | 3986 | 3984 | 3982 | 3980 | 3977 | 3973 | | **0,0** |
| **0,1** | 3970 | 3965 | 3961 | 3856 | | 3951 | 3945 | 3939 | 3932 | 3925 | 3918 | | **0,1** |
| **0,2** | 3910 | 3902 | 3894 | 3885 | | 3876 | 3867 | 3857 | 3847 | 3836 | 3825 | | **0,2** |
| **0,3** | 3814 | 3802 | 3790 | 3778 | | 3765 | 3752 | 3739 | 3726 | 3712 | 3697 | | **0,3** |
| **0,4** | 3683 | 3668 | 3653 | 3637 | | 3621 | 3605 | 3589 | 3572 | 3555 | 3538 | | **0,4** |
|  |  |  |  |  | |  |  |  |  |  |  | |  |
| **0,5** | **0,3521** | 3503 | 3485 | 3467 | | 3448 | 3429 | 3410 | 3391 | 3372 | 3352 | | **0,5** |
| **0,6** | 3332 | 3312 | 3292 | 3271 | | 3251 | 3230 | 3209 | 3187 | 3166 | 3144 | | **0,6** |
| **0,7** | 3123 | 3101 | 3079 | 3056 | | 3034 | 3011 | 2989 | 2966 | 2943 | 2920 | | **0,7** |
| **0,8** | 2897 | 2874 | 2850 | 2827 | | 2803 | 2780 | 2756 | 2732 | 2709 | 2685 | | **0,8** |
| **0,9** | 2661 | 2637 | 2613 | 2589 | | 2565 | 2541 | 2516 | 2492 | 2468 | 2444 | | **0,9** |
|  |  |  |  |  | |  |  |  |  |  |  | |  |
| **1,0** | **0,2420** | 2396 | 2371 | 2347 | | 2323 | 2299 | 2275 | 2251 | 2227 | 2203 | | **1,0** |
| **1,1** | 2179 | 2155 | 2131 | 2107 | | 2083 | 2059 | 2036 | 2021 | 1989 | 1965 | | **1,1** |
| **1,2** | 1942 | 1919 | 1895 | 1872 | | 1849 | 1826 | 1804 | 1781 | 1758 | 1736 | | **1,2** |
| **1,3** | 1714 | 1691 | 1669 | 1647 | | 1626 | 1604 | 1582 | 1561 | 1539 | 1518 | | **1,3** |
| **1,4** | 1497 | 1476 | 1456 | 1435 | | 1415 | 1394 | 1374 | 1354 | 1334 | 1315 | | **1,4** |
|  |  |  |  |  | |  |  |  |  |  |  | |  |
| **1,5** | **0,1295** | 1276 | 1257 | 1238 | | 1219 | 1200 | 1182 | 1163 | 1145 | 1127 | | **1,5** |
| **1,6** | 1109 | 1092 | 1074 | 1057 | | 1040 | 1023 | 1006 | 0989 | 0973 | 0957 | | **1,6** |
| **1,7** | 0940 | 0925 | 0909 | 0893 | | 0878 | 0863 | 0848 | 0833 | 0818 | 0804 | | **1,7** |
| **1,8** | 0790 | 0775 | 0761 | 0748 | | 0734 | 0721 | 0707 | 0694 | 0631 | 0669 | | **1,8** |
| **1,9** | 0656 | 0644 | 0632 | 0620 | | 0608 | 0596 | 0584 | 0573 | 0562 | 0551 | | **1,9** |
|  |  |  |  |  | |  |  |  |  |  |  | |  |
| **2,0** | **0,0540** | 0529 | 0519 | 0508 | | 0498 | 0488 | 0478 | 0468 | 0459 | 0449 | | **2,0** |
| **2,1** | 0440 | 0431 | 0422 | 0413 | | 0404 | 0396 | 0387 | 0379 | 0371 | 0363 | | **2,1** |
| **2,2** | 0355 | 0347 | 0339 | 0332 | | 0325 | 0317 | 0310 | 0303 | 0297 | 0290 | | **2,2** |
| **2,3** | 0283 | 0277 | 0270 | 0264 | | 0258 | 0252 | 0246 | 0241 | 0235 | 0299 | | **2,3** |
| **2,4** | 0224 | 0219 | 0213 | 0208 | | 0203 | 0198 | 0194 | 0189 | 0184 | 0180 | | **2,4** |
|  |  |  |  |  | |  |  |  |  |  |  | |  |
| **2,5** | **0,0175** | 0171 | 0167 | 0163 | | 0158 | 0154 | 0151 | 0147 | 0134 | 0139 | | **2,5** |
| **2,6** | 0136 | 0132 | 0129 | 0126 | | 0122 | 0119 | 0116 | 0113 | 0110 | 0107 | | **2,6** |
| **2,7** | 0104 | 0101 | 0099 | 0096 | | 0093 | 0091 | 0088 | 0086 | 0084 | 0081 | | **2,7** |
| **2,8** | 0079 | 0077 | 0075 | 0073 | | 0071 | 0069 | 0067 | 0065 | 0063 | 0061 | | **2,8** |
| **2,9** | 0060 | 0058 | 0056 | 0055 | | 0053 | 0051 | 0050 | 0048 | 0047 | 0046 | | **2,9** |
|  |  |  |  |  | |  |  |  |  |  |  | |  |
| **3,0** | **0,0044** | 0043 | 0042 | 0040 | | 0039 | 0038 | 0037 | 0036 | 0035 | 0034 | | **3,0** |
| **3,1** | 0033 | 0032 | 0031 | 0030 | | 0029 | 0028 | 0027 | 0026 | 0025 | 0025 | | **3,1** |
| **3,2** | 0024 | 0023 | 0022 | 0022 | | 0021 | 0020 | 0020 | 0019 | 0018 | 0018 | | **3,2** |
| **3,3** | 0017 | 0017 | 0016 | 0016 | | 0015 | 0015 | 0014 | 0014 | 0013 | 0013 | | **3,3** |
| **3,4** | 0012 | 0012 | 0012 | 0011 | | 0011 | 0010 | 0010 | 0010 | 0009 | 0009 | | **3,4** |
|  |  |  |  |  | |  |  |  |  |  |  | |  |
| **3,5** | **0,0009** | 0008 | 0008 | 0008 | | 0008 | 0007 | 0007 | 0007 | 0007 | 0006 | | **3,5** |
| **3,6** | 0006 | 0006 | 0006 | 0005 | | 0005 | 0005 | 0005 | 0005 | 0005 | 0004 | | **3,6** |
| **3,7** | 0004 | 0004 | 0004 | 0004 | | 0004 | 0004 | 0003 | 0003 | 0003 | 0003 | | **3,7** |
| **3,8** | 0003 | 0003 | 0003 | 0003 | | 0003 | 0002 | 0002 | 0002 | 0002 | 0002 | | **3,8** |
| **3,9** | 0002 | 0002 | 0002 | 0002 | | 0002 | 0002 | 0002 | 0002 | 0001 | 0001 | | **3,9** |

# ПРИЛОЖЕНИЕ 2 - Функция Лапласа *Ф(t)*

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| ;  *=НОРМСТРАСП(t)-0,5* | | | |  | | | | | |
|  | | | |  | | | | | |
| **t** | | *Ф(t)* | **t** | *Ф(t)* | | **t** | *Ф(t)* | **t** | *Ф(t)* |
| ***0,00*** | | 0,000000 | ***0,32*** | 0,125516 | | ***0,64*** | 0,238914 | ***0,96*** | 0,331472 |
| ***0,01*** | | 0,003989 | ***0,33*** | 0,129300 | | ***0,65*** | 0,242154 | ***0,97*** | 0,333977 |
| ***0,02*** | | 0,007978 | ***0,34*** | 0,133072 | | ***0,66*** | 0,245373 | ***0,98*** | 0,336457 |
| ***0,03*** | | 0,011966 | ***0,35*** | 0,136831 | | ***0,67*** | 0,248571 | ***0,99*** | 0,338913 |
| ***0,04*** | | 0,015953 | ***0,36*** | 0,140576 | | ***0,68*** | 0,251748 | ***1,00*** | 0,341345 |
| ***0,05*** | | 0,019939 | ***0,37*** | 0,144309 | | ***0,69*** | 0,254903 | ***1,01*** | 0,343752 |
| ***0,06*** | | 0,023922 | ***0,38*** | 0,148027 | | ***0,70*** | 0,258036 | ***1,02*** | 0,346136 |
| ***0,07*** | | 0,027903 | ***0,39*** | 0,151732 | | ***0,71*** | 0,261148 | ***1,03*** | 0,348495 |
| ***0,08*** | | 0,031881 | ***0,40*** | 0,155422 | | ***0,72*** | 0,264238 | ***1,04*** | 0,350830 |
| ***0,09*** | | 0,035856 | ***0,41*** | 0,159097 | | ***0,73*** | 0,267305 | ***1,05*** | 0,353141 |
| ***0,10*** | | 0,039828 | ***0,42*** | 0,162757 | | ***0,74*** | 0,270350 | ***1,06*** | 0,355428 |
| ***0,11*** | | 0,043795 | ***0,43*** | 0,166402 | | ***0,75*** | 0,273373 | ***1,07*** | 0,357690 |
| ***0,12*** | | 0,047758 | ***0,44*** | 0,170031 | | ***0,76*** | 0,276373 | ***1,08*** | 0,359929 |
| ***0,13*** | | 0,051717 | ***0,45*** | 0,173645 | | ***0,77*** | 0,279350 | ***1,09*** | 0,362143 |
| ***0,14*** | | 0,055670 | ***0,46*** | 0,177242 | | ***0,78*** | 0,282305 | ***1,10*** | 0,364334 |
| ***0,15*** | | 0,059618 | ***0,47*** | 0,180822 | | ***0,79*** | 0,285236 | ***1,11*** | 0,366500 |
| ***0,16*** | | 0,063559 | ***0,48*** | 0,184386 | | ***0,80*** | 0,288145 | ***1,12*** | 0,368643 |
| ***0,17*** | | 0,067495 | ***0,49*** | 0,187933 | | ***0,81*** | 0,291030 | ***1,13*** | 0,370762 |
| ***0,18*** | | 0,071424 | ***0,50*** | 0,191462 | | ***0,82*** | 0,293892 | ***1,14*** | 0,372857 |
| ***0,19*** | | 0,075345 | ***0,51*** | 0,194974 | | ***0,83*** | 0,296731 | ***1,15*** | 0,374928 |
| ***0,20*** | | 0,079260 | ***0,52*** | 0,198468 | | ***0,84*** | 0,299546 | ***1,16*** | 0,376976 |
| ***0,21*** | | 0,083166 | ***0,53*** | 0,201944 | | ***0,85*** | 0,302337 | ***1,17*** | 0,379000 |
| ***0,22*** | | 0,087064 | ***0,54*** | 0,205401 | | ***0,86*** | 0,305105 | ***1,18*** | 0,381000 |
| ***0,23*** | | 0,090954 | ***0,55*** | 0,208840 | | ***0,87*** | 0,307850 | ***1,19*** | 0,382977 |
| ***0,24*** | | 0,094835 | ***0,56*** | 0,212260 | | ***0,88*** | 0,310570 | ***1,20*** | 0,384930 |
| ***0,25*** | | 0,098706 | ***0,57*** | 0,215661 | | ***0,89*** | 0,313267 | ***1,21*** | 0,386861 |
| ***0,26*** | | 0,102568 | ***0,58*** | 0,219043 | | ***0,90*** | 0,315940 | ***1,22*** | 0,388768 |
| ***0,27*** | | 0,106420 | ***0,59*** | 0,222405 | | ***0,91*** | 0,318589 | ***1,23*** | 0,390651 |
| ***0,28*** | | 0,110261 | ***0,60*** | 0,225747 | | ***0,92*** | 0,321214 | ***1,24*** | 0,392512 |
| ***0,29*** | | 0,114092 | ***0,61*** | 0,229069 | | ***0,93*** | 0,323814 | ***1,25*** | 0,394350 |
| ***0,30*** | | 0,117911 | ***0,62*** | 0,232371 | | ***0,94*** | 0,326391 |  |  |
| ***0,31*** | | 0,121720 | ***0,63*** | 0,235653 | | ***0,95*** | 0,328944 |  |  |

Продолжение приложения 2

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **t** | *Ф(t)* | **t** | *Ф(t)* | **t** | *Ф(t)* | **t** | *Ф(t)* |
| ***1,26*** | 0,3962 | ***1,59*** | 0,4441 | ***1,92*** | 0,4726 | ***2,50*** | 0,4938 |
| ***1,27*** | 0,3980 | ***1,60*** | 0,4452 | ***1,93*** | 0,4732 | ***2,52*** | 0,4941 |
| ***1,28*** | 0,3997 | ***1,61*** | 0,4463 | ***1,94*** | 0,4738 | ***2,54*** | 0,4945 |
| ***1,29*** | 0,4015 | ***1,62*** | 0,4474 | ***1,95*** | 0,4744 | ***2,56*** | 0,4948 |
| ***1,30*** | 0,4032 | ***1,63*** | 0,4484 | ***1,96*** | 0,4750 | ***2,58*** | 0,4951 |
| ***1,31*** | 0,4049 | ***1,64*** | 0,4495 | ***1,97*** | 0,4756 | ***2,60*** | 0,4953 |
| ***1,32*** | 0,4066 | ***1,65*** | 0,4505 | ***1,98*** | 0,4761 | ***2,62*** | 0,4956 |
| ***1,33*** | 0,4082 | ***1,66*** | 0,4515 | ***1,99*** | 0,4767 | ***2,64*** | 0,4959 |
| ***1,34*** | 0,4099 | ***1,67*** | 0,4525 | ***2,00*** | 0,4772 | ***2,66*** | 0,4961 |
| ***1,35*** | 0,4115 | ***1,68*** | 0,4535 | ***2,02*** | 0,4783 | ***2,68*** | 0,4963 |
| ***1,36*** | 0,4131 | ***1,69*** | 0,4545 | ***2,04*** | 0,4793 | ***2,70*** | 0,4965 |
| ***1,37*** | 0,4147 | ***1,70*** | 0,4554 | ***2,06*** | 0,4803 | ***2,72*** | 0,4967 |
| ***1,38*** | 0,4162 | ***1,71*** | 0,4564 | ***2,08*** | 0,4812 | ***2,74*** | 0,4969 |
| ***1,39*** | 0,4177 | ***1,72*** | 0,4573 | ***2,10*** | 0,4821 | ***2,76*** | 0,4971 |
| ***1,40*** | 0,4192 | ***1,73*** | 0,4582 | ***2,12*** | 0,4830 | ***2,78*** | 0,4973 |
| ***1,41*** | 0,4207 | ***1,74*** | 0,4591 | ***2,14*** | 0,4838 | ***2,80*** | 0,4974 |
| ***1,42*** | 0,4222 | ***1,75*** | 0,4599 | ***2,16*** | 0,4846 | ***2,82*** | 0,4976 |
| ***1,43*** | 0,4236 | ***1,76*** | 0,4608 | ***2,18*** | 0,4854 | ***2,84*** | 0,4977 |
| ***1,44*** | 0,4251 | ***1,77*** | 0,4616 | ***2,20*** | 0,4861 | ***2,86*** | 0,4979 |
| ***1,45*** | 0,4265 | ***1,78*** | 0,4625 | ***2,22*** | 0,4868 | ***2,88*** | 0,4980 |
| ***1,46*** | 0,4279 | ***1,79*** | 0,4633 | ***2,24*** | 0,4875 | ***2,90*** | 0,4981 |
| ***1,47*** | 0,4292 | ***1,80*** | 0,4641 | ***2,26*** | 0,4881 | ***2,92*** | 0,4982 |
| ***1,48*** | 0,4306 | ***1,81*** | 0,4649 | ***2,28*** | 0,4887 | ***2,94*** | 0,4984 |
| ***1,49*** | 0,4319 | ***1,82*** | 0,4656 | ***2,30*** | 0,4893 | ***2,96*** | 0,4985 |
| ***1,50*** | 0,4332 | ***1,83*** | 0,4664 | ***2,32*** | 0,4898 | ***2,98*** | 0,4986 |
| ***1,51*** | 0,4345 | ***1,84*** | 0,4671 | ***2,34*** | 0,4904 | ***3,00*** | 0,49865 |
| ***1,52*** | 0,4357 | ***1,85*** | 0,4678 | ***2,36*** | 0,4909 | ***3,20*** | 0,49931 |
| ***1,53*** | 0,4370 | ***1,86*** | 0,4686 | ***2,38*** | 0,4913 | ***3,40*** | 0,49966 |
| ***1,54*** | 0,4382 | ***1,87*** | 0,4693 | ***2,40*** | 0,4918 | ***3,60*** | 0,499841 |
| ***1,55*** | 0,4394 | ***1,88*** | 0,4699 | ***2,42*** | 0,4922 | ***3,80*** | 0,499928 |
| ***1,S6*** | 0,4406 | ***1,89*** | 0,4706 | ***2,44*** | 0,4927 | ***4,00*** | 0,499968 |
| ***1,57*** | 0,4418 | ***1,90*** | 0,4713 | ***2,46*** | 0,4931 | ***4,50*** | 0,499997 |
| ***1,58*** | 0,4429 | ***1,91*** | 0,4719 | ***2,48*** | 0,4934 | ***5,00*** | 0,499999 |

;

.

# ПРИЛОЖЕНИЕ 3 - Таблица значений критерия Стьюдента

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Таблица значений критерия Стьюдента  , определяемых выражением    где *k* – число степеней свободы.  *=СТЬЮДРАСПОБР* | | | | |  | | | | |
| ***k*** | **0,95** | **0,98** | **0,99** | ***k*** | | **0,95** | **0,98** | **0,99** |
| **4** | 2,776 | 3,747 | 4,604 | **25** | | 2,060 | 2,485 | 2,787 |
| **5** | 2,571 | 3,365 | 4,032 | **26** | | 2,056 | 2,479 | 2,779 |
| **6** | 2,447 | 3,143 | 3,707 | **28** | | 2,048 | 2,467 | 2,763 |
| **7** | 2,365 | 2,998 | 3,499 | **30** | | 2,042 | 2,457 | 2,750 |
| **8** | 2,306 | 2,896 | 3,355 | **32** | | 2,037 | 2,449 | 2,738 |
| **9** | 2,262 | 2,821 | 3,250 | **34** | | 2,032 | 2,441 | 2,728 |
| **10** | 2,228 | 2,764 | 3,169 | **36** | | 2,028 | 2,434 | 2,719 |
| **11** | 2,201 | 2,718 | 3,106 | **38** | | 2,024 | 2,429 | 2,712 |
| **12** | 2,179 | 2,681 | 3,055 | **40** | | 2,021 | 2,423 | 2,704 |
| **13** | 2,160 | 2,650 | 3,012 | **45** | | 2,014 | 2,412 | 2,690 |
| **14** | 2,145 | 2,624 | 2,977 | **50** | | 2,009 | 2,403 | 2,678 |
| **15** | 2,131 | 2,602 | 2,947 | **60** | | 2,000 | 2,390 | 2,660 |
| **16** | 2,120 | 2,583 | 2,921 | **70** | | 1,994 | 2,381 | 2,648 |
| **17** | 2,110 | 2,567 | 2,898 | **80** | | 1,990 | 2,374 | 2,639 |
| **18** | 2,101 | 2,552 | 2,878 | **90** | | 1,987 | 2,368 | 2,632 |
| **19** | 2,093 | 2,539 | 2,861 | **100** | | 1,984 | 2,364 | 2,626 |
| **20** | 2,086 | 2,528 | 2,845 | **120** | | 1,980 | 2,358 | 2,617 |
| **22** | 2,074 | 2,508 | 2,819 | **1000** | | 1,962 | 2,330 | 2,581 |
| **24** | 2,064 | 2,492 | 2,797 | **НЗР** | | 1,645 | 2,054 | 2,326 |

# ПРИЛОЖЕНИЕ 4 - Критические точки распределения Пирсона

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Критические точки  распределения  Пирсона  ,  где *k* – число степеней свободы | | | |  | | | | | |
| ***степеней***  ***свободы* k** | Уровень значимости  (площадь правого хвоста) | | | | | | | | |
| **0,01** | **0,02** | **0,025** | | **0,05** | **0,95** | **0,975** | **0,98** | **0,99** |
| **1** | 6,6349 | 5,4119 | 5,0239 | | 3,8415 | 0,00393 | 0,00098 | 0,00063 | 0,00016 |
| **2** | 9,2103 | 7,8240 | 7,3778 | | 5,9915 | 0,1026 | 0,0506 | 0,0404 | 0,0201 |
| **3** | 11,3449 | 9,8374 | 9,3484 | | 7,8147 | 0,3518 | 0,2158 | 0,1848 | 0,1148 |
| **4** | 13,2767 | 11,6678 | 11,1433 | | 9,4877 | 0,7107 | 0,4844 | 0,4294 | 0,2971 |
| **5** | 15,0863 | 13,3882 | 12,8325 | | 11,0705 | 1,1455 | 0,8312 | 0,7519 | 0,5543 |
| **6** | 16,8119 | 15,0332 | 14,4494 | | 12,5916 | 1,6354 | 1,2373 | 1,1344 | 0,8721 |
| **7** | 18,4753 | 16,6224 | 16,0128 | | 14,0671 | 2,1673 | 1,6899 | 1,5643 | 1,2390 |
| **8** | 20,0902 | 18,1682 | 17,5345 | | 15,5073 | 2,7326 | 2,1797 | 2,0325 | 1,6465 |
| **9** | 21,6660 | 19,6790 | 19,0228 | | 16,9190 | 3,3251 | 2,7004 | 2,5324 | 2,0879 |
| **10** | 23,2093 | 21,1608 | 20,4832 | | 18,3070 | 3,9403 | 3,2470 | 3,0591 | 2,5582 |
| **11** | 24,7250 | 22,6179 | 21,9200 | | 19,6751 | 4,5748 | 3,8157 | 3,6087 | 3,0535 |
| **12** | 26,2170 | 24,0540 | 23,3367 | | 21,0261 | 5,2260 | 4,4038 | 4,1783 | 3,5706 |
| **13** | 27,6882 | 25,4715 | 24,7356 | | 22,3620 | 5,8919 | 5,0088 | 4,7654 | 4,1069 |
| **14** | 29,1412 | 26,8728 | 26,1189 | | 23,6848 | 6,5706 | 5,6287 | 5,3682 | 4,6604 |
| **15** | 30,5779 | 28,2595 | 27,4884 | | 24,9958 | 7,2609 | 6,2621 | 5,9849 | 5,2293 |
| **16** | 31,9999 | 29,6332 | 28,8454 | | 26,2962 | 7,9616 | 6,9077 | 6,6142 | 5,8122 |
| **17** | 33,4087 | 30,9950 | 30,1910 | | 27,5871 | 8,6718 | 7,5642 | 7,2550 | 6,4078 |
| **18** | 34,8053 | 32,3462 | 31,5264 | | 28,8693 | 9,3905 | 8,2307 | 7,9062 | 7,0149 |
| **19** | 36,1909 | 33,6874 | 32,8523 | | 30,1435 | 10,1170 | 8,9065 | 8,5670 | 7,6327 |
| **20** | 37,5662 | 35,0196 | 34,1696 | | 31,4104 | 10,8508 | 9,5908 | 9,2367 | 8,2604 |
| **21** | 38,9322 | 36,3434 | 35,4789 | | 32,6706 | 11,5913 | 10,2829 | 9,9146 | 8,8972 |
| **22** | 40,2894 | 37,6595 | 36,7807 | | 33,9244 | 12,3380 | 10,9823 | 10,6000 | 9,5425 |
| **23** | 41,6384 | 38,9683 | 38,0756 | | 35,1725 | 13,0905 | 11,6886 | 11,2926 | 10,1957 |
| **24** | 42,9798 | 40,2704 | 39,3641 | | 36,4150 | 13,8484 | 12,4012 | 11,9918 | 10,8564 |
| **25** | 44,3141 | 41,5661 | 40,6465 | | 37,6525 | 14,6114 | 13,1197 | 12,6973 | 11,5240 |
| **26** | 45,6417 | 42,8558 | 41,9232 | | 38,8851 | 15,3792 | 13,8439 | 13,4086 | 12,1981 |
| **27** | 46,9629 | 44,1400 | 43,1945 | | 40,1133 | 16,1514 | 14,5734 | 14,1254 | 12,8785 |
| **28** | 48,2782 | 45,4188 | 44,4608 | | 41,3371 | 16,9279 | 15,3079 | 14,8475 | 13,5647 |
| **29** | 49,5879 | 46,6927 | 45,7223 | | 42,5570 | 17,7084 | 16,0471 | 15,5745 | 14,2565 |
| **30** | 50,8922 | 47,9618 | 46,9792 | | 43,7730 | 18,4927 | 16,7908 | 16,3062 | 14,9535 |
| **31** | 52,1914 | 49,2264 | 48,2319 | | 44,9853 | 19,2806 | 17,5387 | 17,0423 | 15,6555 |
| **32** | 53,4858 | 50,4867 | 49,4804 | | 46,1943 | 20,0719 | 18,2908 | 17,7827 | 16,3622 |

# ПРИЛОЖЕНИЕ 5 - Критические точки распределения Стьюдента

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Критические точки распределения  Стьюдента, определяемые выражением  ,  где *k* – число степеней свободы.  =СТЬЮДРАСПОБР *двустор. кр. обл.*  =СТЬЮДРАСПОБР *одностор.* | | | | |  | | | |
| k | *Уровень значимости  (двусторонняя критическая область)* | | | | | | |
| 0,001 | 0,002 | 0,005 | 0,01 | 0,02 | 0,05 | 0,1 |
| 4 | 8,610 | 7,173 | 5,598 | 4,604 | 3,747 | 2,776 | 2,132 |
| 5 | 6,869 | 5,893 | 4,773 | 4,032 | 3,365 | 2,571 | 2,015 |
| 6 | 5,959 | 5,208 | 4,317 | 3,707 | 3,143 | 2,447 | 1,943 |
| 7 | 5,408 | 4,785 | 4,029 | 3,499 | 2,998 | 2,365 | 1,895 |
| 8 | 5,041 | 4,501 | 3,833 | 3,355 | 2,896 | 2,306 | 1,860 |
| 9 | 4,781 | 4,297 | 3,690 | 3,250 | 2,821 | 2,262 | 1,833 |
| 10 | 4,587 | 4,144 | 3,581 | 3,169 | 2,764 | 2,228 | 1,812 |
| 11 | 4,437 | 4,025 | 3,497 | 3,106 | 2,718 | 2,201 | 1,796 |
| 12 | 4,318 | 3,930 | 3,428 | 3,055 | 2,681 | 2,179 | 1,782 |
| 13 | 4,221 | 3,852 | 3,372 | 3,012 | 2,650 | 2,160 | 1,771 |
| 14 | 4,140 | 3,787 | 3,326 | 2,977 | 2,624 | 2,145 | 1,761 |
| 15 | 4,073 | 3,733 | 3,286 | 2,947 | 2,602 | 2,131 | 1,753 |
| 16 | 4,015 | 3,686 | 3,252 | 2,921 | 2,583 | 2,120 | 1,746 |
| 17 | 3,965 | 3,646 | 3,222 | 2,898 | 2,567 | 2,110 | 1,740 |
| 18 | 3,922 | 3,610 | 3,197 | 2,878 | 2,552 | 2,101 | 1,734 |
| 20 | 3,850 | 3,552 | 3,153 | 2,845 | 2,528 | 2,086 | 1,725 |
| 22 | 3,792 | 3,505 | 3,119 | 2,819 | 2,508 | 2,074 | 1,717 |
| 24 | 3,745 | 3,467 | 3,091 | 2,797 | 2,492 | 2,064 | 1,711 |
| 26 | 3,707 | 3,435 | 3,067 | 2,779 | 2,479 | 2,056 | 1,706 |
| 28 | 3,674 | 3,408 | 3,047 | 2,763 | 2,467 | 2,048 | 1,701 |
| 30 | 3,646 | 3,385 | 3,030 | 2,750 | 2,457 | 2,042 | 1,697 |
| 34 | 3,601 | 3,348 | 3,002 | 2,728 | 2,441 | 2,032 | 1,691 |
| 40 | 3,551 | 3,307 | 2,971 | 2,704 | 2,423 | 2,021 | 1,684 |
| 50 | 3,496 | 3,261 | 2,937 | 2,678 | 2,403 | 2,009 | 1,676 |
| 60 | 3,460 | 3,232 | 2,915 | 2,660 | 2,390 | 2,000 | 1,671 |
| 70 | 3,435 | 3,211 | 2,899 | 2,648 | 2,381 | 1,994 | 1,667 |
| 80 | 3,416 | 3,195 | 2,887 | 2,639 | 2,374 | 1,990 | 1,664 |
| 100 | 3,390 | 3,174 | 2,871 | 2,626 | 2,364 | 1,984 | 1,660 |
| 120 | 3,373 | 3,160 | 2,860 | 2,617 | 2,358 | 1,980 | 1,658 |
| 1000 | 3,300 | 3,098 | 2,813 | 2,581 | 2,330 | 1,962 | 1,646 |
| НЗР | 3,090 | 2,878 | 2,576 | 2,326 | 2,054 | 1,645 | 1,282 |
|  | 0,0005 | 0,001 | 0,0025 | 0,0050 | 0,01 | 0,025 | 0,05 |
| *Уровень значимости  (односторонняя критическая область)* | | | | | | | |

# ПРИЛОЖЕНИЕ 6 - Критические точки распределения Фишера-Снедекора

|  |  |
| --- | --- |
| , ,  ( и — число степеней свободы большей и меньшей дисперсии соответственно)  =FРАСПОБР() |  |

***Уровень значимости ***

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| k2\k1 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 |
| 2 | 98,50 | 99,00 | 99,17 | 99,25 | 99,30 | 99,33 | 99,36 | 99,37 | 99,39 | 99,40 | 99,41 | 99,42 | 99,42 | 99,43 | 99,43 | 99,44 |
| 3 | 34,12 | 30,82 | 29,46 | 28,71 | 28,24 | 27,91 | 27,67 | 27,49 | 27,35 | 27,23 | 27,13 | 27,05 | 26,98 | 26,92 | 26,87 | 26,83 |
| 4 | 21,20 | 18,00 | 16,69 | 15,98 | 15,52 | 15,21 | 14,98 | 14,80 | 14,66 | 14,55 | 14,45 | 14,37 | 14,31 | 14,25 | 14,20 | 14,15 |
| 5 | 16,26 | 13,27 | 12,06 | 11,39 | 10,97 | 10,67 | 10,46 | 10,29 | 10,16 | 10,05 | 9,96 | 9,89 | 9,82 | 9,77 | 9,72 | 9,68 |
| 6 | 13,75 | 10,92 | 9,78 | 9,15 | 8,75 | 8,47 | 8,26 | 8,10 | 7,98 | 7,87 | 7,79 | 7,72 | 7,66 | 7,60 | 7,56 | 7,52 |
| 7 | 12,25 | 9,55 | 8,45 | 7,85 | 7,46 | 7,19 | 6,99 | 6,84 | 6,72 | 6,62 | 6,54 | 6,47 | 6,41 | 6,36 | 6,31 | 6,28 |
| 8 | 11,26 | 8,65 | 7,59 | 7,01 | 6,63 | 6,37 | 6,18 | 6,03 | 5,91 | 5,81 | 5,73 | 5,67 | 5,61 | 5,56 | 5,52 | 5,48 |
| 9 | 10,56 | 8,02 | 6,99 | 6,42 | 6,06 | 5,80 | 5,61 | 5,47 | 5,35 | 5,26 | 5,18 | 5,11 | 5,05 | 5,01 | 4,96 | 4,92 |
| 10 | 10,04 | 7,56 | 6,55 | 5,99 | 5,64 | 5,39 | 5,20 | 5,06 | 4,94 | 4,85 | 4,77 | 4,71 | 4,65 | 4,60 | 4,56 | 4,52 |
| 11 | 9,65 | 7,21 | 6,22 | 5,67 | 5,32 | 5,07 | 4,89 | 4,74 | 4,63 | 4,54 | 4,46 | 4,40 | 4,34 | 4,29 | 4,25 | 4,21 |
| 12 | 9,33 | 6,93 | 5,95 | 5,41 | 5,06 | 4,82 | 4,64 | 4,50 | 4,39 | 4,30 | 4,22 | 4,16 | 4,10 | 4,05 | 4,01 | 3,97 |
| 13 | 9,07 | 6,70 | 5,74 | 5,21 | 4,86 | 4,62 | 4,44 | 4,30 | 4,19 | 4,10 | 4,02 | 3,96 | 3,91 | 3,86 | 3,82 | 3,78 |
| 14 | 8,86 | 6,51 | 5,56 | 5,04 | 4,69 | 4,46 | 4,28 | 4,14 | 4,03 | 3,94 | 3,86 | 3,80 | 3,75 | 3,70 | 3,66 | 3,62 |
| 15 | 8,68 | 6,36 | 5,42 | 4,89 | 4,56 | 4,32 | 4,14 | 4,00 | 3,89 | 3,80 | 3,73 | 3,67 | 3,61 | 3,56 | 3,52 | 3,49 |
| 16 | 8,53 | 6,23 | 5,29 | 4,77 | 4,44 | 4,20 | 4,03 | 3,89 | 3,78 | 3,69 | 3,62 | 3,55 | 3,50 | 3,45 | 3,41 | 3,37 |

***Уровень значимости ***

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| k2\k1 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 |
| 2 | 18,51 | 19,00 | 19,16 | 19,25 | 19,30 | 19,33 | 19,35 | 19,37 | 19,38 | 19,40 | 19,40 | 19,41 | 19,42 | 19,42 | 19,43 | 19,43 |
| 3 | 10,13 | 9,55 | 9,28 | 9,12 | 9,01 | 8,94 | 8,89 | 8,85 | 8,81 | 8,79 | 8,76 | 8,74 | 8,73 | 8,71 | 8,70 | 8,69 |
| 4 | 7,71 | 6,94 | 6,59 | 6,39 | 6,26 | 6,16 | 6,09 | 6,04 | 6,00 | 5,96 | 5,94 | 5,91 | 5,89 | 5,87 | 5,86 | 5,84 |
| 5 | 6,61 | 5,79 | 5,41 | 5,19 | 5,05 | 4,95 | 4,88 | 4,82 | 4,77 | 4,74 | 4,70 | 4,68 | 4,66 | 4,64 | 4,62 | 4,60 |
| 6 | 5,99 | 5,14 | 4,76 | 4,53 | 4,39 | 4,28 | 4,21 | 4,15 | 4,10 | 4,06 | 4,03 | 4,00 | 3,98 | 3,96 | 3,94 | 3,92 |
| 7 | 5,59 | 4,74 | 4,35 | 4,12 | 3,97 | 3,87 | 3,79 | 3,73 | 3,68 | 3,64 | 3,60 | 3,57 | 3,55 | 3,53 | 3,51 | 3,49 |
| 8 | 5,32 | 4,46 | 4,07 | 3,84 | 3,69 | 3,58 | 3,50 | 3,44 | 3,39 | 3,35 | 3,31 | 3,28 | 3,26 | 3,24 | 3,22 | 3,20 |
| 9 | 5,12 | 4,26 | 3,86 | 3,63 | 3,48 | 3,37 | 3,29 | 3,23 | 3,18 | 3,14 | 3,10 | 3,07 | 3,05 | 3,03 | 3,01 | 2,99 |
| 10 | 4,96 | 4,10 | 3,71 | 3,48 | 3,33 | 3,22 | 3,14 | 3,07 | 3,02 | 2,98 | 2,94 | 2,91 | 2,89 | 2,86 | 2,85 | 2,83 |
| 11 | 4,84 | 3,98 | 3,59 | 3,36 | 3,20 | 3,09 | 3,01 | 2,95 | 2,90 | 2,85 | 2,82 | 2,79 | 2,76 | 2,74 | 2,72 | 2,70 |
| 12 | 4,75 | 3,89 | 3,49 | 3,26 | 3,11 | 3,00 | 2,91 | 2,85 | 2,80 | 2,75 | 2,72 | 2,69 | 2,66 | 2,64 | 2,62 | 2,60 |
| 13 | 4,67 | 3,81 | 3,41 | 3,18 | 3,03 | 2,92 | 2,83 | 2,77 | 2,71 | 2,67 | 2,63 | 2,60 | 2,58 | 2,55 | 2,53 | 2,51 |
| 14 | 4,60 | 3,74 | 3,34 | 3,11 | 2,96 | 2,85 | 2,76 | 2,70 | 2,65 | 2,60 | 2,57 | 2,53 | 2,51 | 2,48 | 2,46 | 2,44 |
| 15 | 4,54 | 3,68 | 3,29 | 3,06 | 2,90 | 2,79 | 2,71 | 2,64 | 2,59 | 2,54 | 2,51 | 2,48 | 2,45 | 2,42 | 2,40 | 2,38 |
| 16 | 4,49 | 3,63 | 3,24 | 3,01 | 2,85 | 2,74 | 2,66 | 2,59 | 2,54 | 2,49 | 2,46 | 2,42 | 2,40 | 2,37 | 2,35 | 2,33 |

# ЛИТЕРАТУРА

1. **Вентцель Е.**С. Теория вероятностей: учебник для студентов вузов. – 10 изд. – М.: Издательский центр «Академия», 2005. – 576с.
2. **Выск Н.Д., Селиванов Ю.В., Титаренко В.И.** Вероятность и случайные величины. Методические указания и варианты курсовых заданий по теории вероятностей. М., МАТИ, 2004.
3. **Гмурман В.Е.** Теория вероятностей и математическая статистика: уч. пособие. – 12-е изд. – М.: Высшее образование, 2008. - 479с.
4. **Гмурман В.Е.** Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике: уч. пособие для студентов вузов. – 4-е изд. – М.: Высшая школа, 1997. - 400с.
5. **Воскобойников Ю.Е.** Математическая статистика (с примерами в Excel): учеб. пособие / Ю.Е.Воскобойников, Е.И.Тимошенко; Новосиб. гос. архитектур.-строит. ун-т (Сибстрин). – 2-е изд., перераб. и доп. – Новосибирск: НГАСУ (Сибстрин), 2006. – 152 с.
6. **Гулай Т.А., Долгополова А.Ф., Литвин Д.Б., Мелешко С.В.** Теория вероятностей и математическая статистика. - 2-е изд. - Ставрополь : Агрус, 2013. - 256с.
7. .

Публикуется в авторской редакции

Подписано в печать 10.11.2017. Бумага офсетная. Гарнитура "Times".

Формат 60×84/16. Усл. печ. л. 4,9. Тираж 135 экз. Заказ №14.

Отпечатано с готового оригинал-макета в типографии "Сервисшкола",

355011, г.Ставрополь, ул. 45-я Параллель, 36, те./факс.: (8652) 57-47-27, 57-47-25,

http://книга-ставрополь.рф, e-mail: s-school@mail.ru